OFPPT

ROYAUME DU MAROC

مكتب التكوين المهني وإنعاش الشغل

Office de la Formation Professionnelle et de la Promotion du Travail
Direction Recherche et Ingénierie de la Formation

RÉSUMÉ THÉORIQUE
&
GUIDE DE TRAVAUX PRATIQUES

MODULE 21 : MATHÉMATIQUE ET MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Secteur : FABRICATION MÉCANIQUE

Spécialité : T.S.M.F.M.

Niveau : Technicien spécialisé

PORTAIL DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE AU MAROC

Télécharger tous les modules de toutes les filières de l'OFPPT sur le site dédié à la formation professionnelle au Maroc : **www.marocetude.com**

Pour cela visiter notre site www.marocetude.com et choisissez la rubrique :

MODULES ISTA

Document élaboré par :

Nom et prénom	*EFP*	*Direction*
FLOREA FLORIAN	***CDC Génie Mécanique***	***DRIF***
EDDANGUIR AHMED	***ISTA GM***	***DR GC***

Révision linguistique

-
-
-

Validation

- ***ETTAIB Chouaïb***
-
-

SOMMAIRE

MODULE 21 : MATHÉMATIQUES ET MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Code : **Durée : 35 heures**

OBJECTIF OPERATIONNEL DE PREMIER NIVEAU DE COMPORTEMENT

COMPORTEMENT ATTENDU

Pour démontrer sa compétence, le stagiaire doit
résoudre des problèmes de mathématiques et de mécanique appliquée
selon les conditions, les critères et les précisions qui suivent.

CONDITIONS D'EVALUATION

- Travail individuel.
- À partir :
  - de plan, de croquis ou de directives;
  - d'un cahier des charges;
  - de documents et données techniques ;
  - de données industrielles,
  - des études de cas
  - d'un système mécanique à étudier
- À l'aide :
  - d'une calculatrice (éventuellement d'un logiciel de calcul)
  - de formulaires, abaques et diagrammes
  - du matériel de travail

CRITERES GENERAUX DE PERFORMANCE

- Analyse et résolution des problèmes de mathématiques
- Analyse des systèmes mécaniques
- Application des principes fondamentaux de la mécanique
- Travail méthodique
- Précision et exactitude des calculs
- Argumentation et justification des réponses
- Traçabilité du travail et notes de calculs

OBJECTIF OPÉRATIONNEL DE PREMIER NIVEAU DE COMPORTEMENT (suite)

PRECISIONS SUR LE **COMPORTEMENT ATTENDU**

A. Effectuer des calculs professionnels d’atelier

B. Vérifier l’équilibre d’un corps dans l’espace

C. Calculer les efforts aux appuis et estimer le dimensionnement d’un composant mécanique simple soumis à des efforts dans l’espace et dont on connaît le point d’application, la direction, le sens et l’intensité

D. Modéliser un mécanisme et calculer analytiquement les trajectoires et les vitesses relatives des différents composants

E. Déterminer les puissances mises en jeux dans le déplacement d’un corps

F. Maîtriser les principes de bases de la mécanique vibratoire

G. Maîtriser le calcul des fonctions différentielles du 1^{er} et $2^{ème}$ degré

CRITERES PARTICULIERS DE PERFORMANCE

- Choix correct des méthodes de calculs
- Exactitude des calculs

- Méthodes de calcul logiques et rigoureuses (graphique et analytique)
- Propreté et clarté des tracés

- Identification d’une position isostatique et hyperstatique
- Application judicieuse des équations de la statique et des hypothèses de la RDM

- Fidélité du modèle choisi
- Choix correct du référentiel d’étude
- Résolution analytique et graphique

- Choix correct de la méthode et des hypothèses d’analyse et de calcul
- Importance d’une puissance par rapport au travail à effectuer

- Effets de la résonance mécanique

- Résolution des équations différentielles de premier et second ordre

OBJECTIFS OPERATIONNELS DE SECOND NIVEAU

Le stagiaire doit maîtriser les savoirs, savoir-faire, savoir-percevoir ou savoir-être juges préalables aux apprentissages directement requis pour l'atteinte de l'objectif opérationnel de premier niveau, tels que :

Avant d'apprendre à effectuer des calculs professionnels d'atelier (A) :

1. Maîtriser les notions de base de mathématiques
2. Comprendre l'objectif avant de résoudre le problème

Avant d'apprendre à vérifier l'équilibre d'un corps dans l'espace (B) :

3. Maîtriser les calculs vectoriels et matriciels
4. Se soucier des choix des formules et de la précision des réponses

Avant d'apprendre à calculer les efforts aux appuis et estimer le dimensionnement d'un composant mécanique simple soumis à des efforts dans l'espace et dont on connaît le point d'application, la direction, le sens et l'intensité (C) :

5. Maîtriser la notion d'isostatisme et réduire un système hyperstatique
6. Définir les différents types de liaisons mécaniques : degrés de libertés et torseurs de liaisons

Avant d'apprendre à modéliser un mécanisme et calculer analytiquement les trajectoires et les vitesses relatives des différents composants (D) :

7. Maîtriser les fonctions et le calcul des dérivées
8. Se soucier de la propreté et de la présentation des solutions, des schémas…

Avant d'apprendre à déterminer les puissances mises en jeux dans le déplacement d'un corps (E) :

9. Justifier et argumenter ses choix et ses hypothèses

Avant d'apprendre à maîtriser les principes de bases de la mécanique vibratoire (F) :

10. Se soucier de l'importance des vibrations dans la conception des mécanismes

Avant d'apprendre à maîtriser le calcul des fonctions différentielles du 1er et 2ème degré (G) :

11. Maîtriser les fonctions numériques à plusieurs variables

MODULE 21 : MATHEMATIQUES ET MECANIQUE APPLIQUEE

Code :	Théorie : 60 %
Durée : 35 heures	Travaux pratiques : 36 %
Responsabilité : D'établissement	Evaluation : 4 %

OBJECTIF OPERATIONNEL DE PREMIER NIVEAU
DE COMPORTEMENT

COMPETENCE

- **Résoudre des problèmes de mathématiques et de mécanique appliquée liées à la fabrication mécanique.**

PRESENTATION

Ce module de compétence générale se dispense en cours de la première année du programme formation. Ce module est en parallèle à tous les modules de compétences à caractère mécanique où les calculs mathématiques et mécaniques sont prépondérants.

DESCRIPTION

L'objectif de ce module est de faire consolider les outils mathématiques permettant de traiter les problèmes de mécanique relatifs à l'étude des mécanismes. Il vise donc à rendre le stagiaire capable de modéliser un mécanisme, de bien poser un problème (hypothèses, équations,…) et d'effectuer les calculs professionnels nécessaires au métier.

CONTEXTE D'ENSEIGNEMENT

- A l'aide d'exemples et exercices appropriés, utiliser les outils mathématiques et les lois de la mécanique pour la résolution des problèmes d'étude et de conception des outillages de production.
- Suivre une démarche logique de résolution de problème dans tous les cas étudiés

CONDITIONS D'EVALUATION

- Travail individuel.
- A partir :
  - De plan, de croquis ou de directives
  - D'un cahier des charges
  - De documents et données techniques
  - Des études de cas
  - D'un système mécanique à étudier
- A l'aide :
  - D'une calculatrice (éventuellement d'un micro-ordinateur et un logiciel de calcul)
  - De formulaires, abaques et diagrammes
  - Du matériel de travail

OBJECTIFS	ÉLÉMENTS DE CONTENU
1. Maîtriser les notions de base de mathématiques	-Rappels : • Géométrie plane • Relations métriques dans les triangles et figures géométriques • Cercle et les relations trigonométriques dans les triangles rectangle • Lecture des tableaux et des abaques • Densité et masse volumique : calculs de débits et de poids • Les progressions arithmétiques et géométriques • Calcul polynomial • Les équations et inéquations du 1er et 2ème degré • Calculs afférents à l'équation de la droite • Résolution des systèmes d'équation du 1er degré à N inconnues • Les fonctions logarithmiques et exponentielles • Les calculs numériques avec des nombres infiniment grands ou petits • Le calcul des approximations numériques et d'erreurs
2. Comprendre l'objectif avant de résoudre le problème	-But du calculs -Recherche d'informations complémentaires -Données et hypothèse d'un problème -Les points à déterminer -Etablissement des équations -Choix de la méthode de résolution
H. Effectuer des calculs professionnels d'atelier	-Lecture et compréhension d'exercices et problèmes posés -Calculs sur piges, -Calculs de coordonnées de points dans l'espace… -Calcul de : • Coût de production • Cinématique de machines • Paramètres de coupe • Transfert de cote, de surépaisseur • Cotation ; tolérances, jeux
3. Maîtriser les calculs vectoriels et matriciels	-Calculs vectoriels : • Approfondissement du calcul vectoriel et de son application en mécanique • Fonctions vectorielles • Produits scalaires et vectoriels • Dérivée des fonctions vectorielles

4. Se soucier des choix des formules et de la précision des réponses	-Matrices : • Définition, écriture • Opérations sur les matrices
	-Les erreurs (de calculs ou de choix de formules) -Maîtrise de risque en cas d'erreurs probables
I. Vérifier l'équilibre d'un corps dans l'espace	
5. Maîtriser la notion d'isostatisme et réduire un système hyperstatique	-Définition des forces et sommes de forces dans l'espace : application des vecteurs -Torseur de forces et des moments -Règles de calculs entre les torseurs -Définition des vecteurs libres ou glissants, sommes de vecteurs dans le plan et l'espace -Equations de la statique -Equilibre d'un corps soumis à des forces concourantes -Centre de gravité -Equilibre d'un corps dans l'espace avec application du torseur de forces et des moments -Etude des torseurs de liaison frottement, adhérence -Principe fondamental des méthodes de résolution graphique de type dynamique et funiculaire
6. Définir les différentes types de liaisons mécaniques : degrés de libertés et torseurs de liaisons	-Isostatisme et hyperstatisme -Degré de liberté -Matrice d'isostatisme -Applications aux mécanismes d'ablocage : • Arc-boutement • Les cames d'ablocage
J. Calculer les efforts aux appuis et estimer le dimensionnement d'un composant mécanique simple soumis à des efforts dans l'espace et dont on connaît le point d'application, la direction, le sens et l'intensité	-Torseurs de liaisons et réactions aux appuis -Analyse des types de liaisons et l'isostatisme dans le plan
7. Maîtriser le fonctions et le calcul des dérivées	-Définition des contraintes simples : unités, relations avec les essais mécaniques de traction et de cisaillement. -Etude des sollicitations simples et statiques dans le plan : torsion, flexion -Etude des structures à barres simples (poutre sur 2 appuis ou encastrée) -Coefficients de sécurité -Calculs de ressorts

8. Se soucier de la propreté et de la présentation des solutions, des schémas…

K. Modéliser un mécanisme et calculer analytiquement les trajectoires et les vitesses relatives des différents composants

9. Justifier et argumenter ses choix

L. Déterminer les puissances mises en jeux dans le déplacement d'un corps

10. Se soucier de l'importance des vibrations dans la conception des mécanisme

M. Maîtriser les principes de bases de la mécanique vibratoire

- Fonctions et études des courbes planes
  - Etudes des limites, maxi, mini
  - Equations paramétriques et polaires
- Intégrales :
  - Définition et applications graphiques aux calculs de surface
  - Formules limitées aux fonctions polynomiales simples et exponentielles
  - Principe du changement de variable
- Applications : calculs de volume, centre de gravité, moment d'inertie, rayon de courbure…

- Clarté et propreté des feuilles de calculs

- Torseur cinématique
- Etude du mouvement uniforme plan d'un point (rectiligne et circulaire)
- Centre instantanée de rotation
- Composition des mouvements plan sur plan et mouvement hélicoïdal
- Mouvement uniforme et uniformément accéléré : applications aux motorisations électriques, pneumatiques, hydrauliques
- Mouvement quelconque d'un solide dans l'espace torseur cinématique
- Moment dynamique (torseur dynamique)
- Equilibre dynamique d'un corps en rotation

- Hypothèses de calcul
- Données
- Formules
- Méthodes de calculs

- Travail et puissance mécaniques : définitions, unités, rendements, (applications aux effets de la gravité)
- Energie cinétique, potentielle et mécanique
- Principe de la conservation de l'énergie mécanique

- Expériences et démonstrations simples des effets de la résonance mécanique (exemples : vibration dans la voiture et la relation avec le vitesse du moteur…)

11. Maîtriser les fonctions numériques à plusieurs variables	-Mouvement vibratoires : • fréquence, • longueur d'onde • résonance • amortissement -Applications : • associations de ressorts • extensions aux problèmes de l'élasticité des composants
N. Maîtriser le calcul des fonctions différentielles du 1er et 2ème degré	-Fonctions numériques à plusieurs variables • Définition • Dérivées partielles -Notions d'intégrales doubles (exemples d'applications) -Equations différentielles -Equation du premier ordre à variables linéaires -Equations linéaire du seconde ordre à coefficients constants (principes) -Initiation aux calculs par éléments finis peut être envisagée -Applications en thermique et en calculs mécaniques

I. VOCABULAIRE DE MATHÉMATIQUE

Notations et Symboles	
Symbole	**Définition**
$\forall$	quel que soit
$\exists$	il existe
$\Rightarrow$	implique
$\Leftrightarrow$	équivalent à (= ssi : si et seulement si)
$\stackrel{def}{=}$	égal à, par définition
ie	c'est-à-dire

1. Notions relatives aux ensembles

1.1 Ensembles

Si on désigne par E un ensemble, x un élément de E, x est aussi appelé point ; on écrit :

$x \in E$ x appartient à E ;

$x \notin E$ x n'appartient pas à E ;

$\{x \in E, P\}$ ensemble des éléments x de E, ayant la propriété P (la virgule peut être remplacée par / ou par ;) ;

$F \subset E$ F partie (sous-ensemble de E) contenue dans E ; tout élément x de F est élément de E : $\forall\ x \in F \Leftrightarrow x \in E$;

$\subset$ est dite l'inclusion ;

$\varnothing$ ensemble vide.

$(A_i)_{i \in I}$ une famille (quelconque) de sous-ensembles de E ;

on note :

$A_1 \cup A_2$ l'union de A1 et A2, ie l'ensemble des éléments qui appartiennent à A1 ou (non exclusif) à A2 ;

$A_1 \cap A_2$ l'intersection de A1 et A2 , ie l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A1 et à A2 ;

$\cup$ L'union de la famille Ai = $\{x \in E,\ \exists\ i \in I$ tel que $x \in A_i\}$;

$\cap$ L'intersection de la famille Ai = $\{x \in E,\ x \in A_i\ ; \forall\ i \in I\}$

2. Notions relatives aux nombres

2.1 Principaux ensembles de nombres

N ; ensemble des entiers naturels : {0, 1, 2, ...} ;
Z ; ensemble des entiers relatifs {..., – 2, – 1, 0, 1, 2, ...} ;
Q ; ensemble des nombres rationnels, ie ensemble des fractions : **p/q** avec **p** et **q** $\in Z$
R ; ensemble des nombres réels ;
N, Z, Q, R ; sont des ensembles ordonnés pour la relation $\leq$;
C ; ensemble des nombres complexes ;

On utilise aussi souvent les ensembles suivants :

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\} = \{1, 2, ...\}$$
$$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$$
$$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}\backslash\{0\}$$
$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$
$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$$
$$\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q},\ x \geqslant 0\}$$
$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0\}$$

2.2 Intervalles en R :

$[a, b]$	fermé $= \{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x \leqslant b\}$
$]a, b[$	ouvert $= \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$
$[a, b[$	semi-ouvert à droite $= \{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x < b\}$
$]a, b]$	semi-ouvert à gauche $= \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leqslant b\}$

On désigne parfois par (a, b) l'ensemble des nombres réels compris entre a et b, bornes comprises ou non (à ne pas confondre avec le couple (a, b)).

2.3. Notation dans C

Soit $z \in \mathbb{C}$ (un nombre complexe) ; on note :

$$z = x + \mathrm{i}y,\ \mathrm{i} = \sqrt{-1}$$

avec	$x = \mathrm{Re}\, z$	la partie réelle de z,
	$y = \mathrm{Im}\, z$	la partie imaginaire de z,
	$\rho = \lvert z\rvert$	le module de z ; $\lvert z\rvert = (x^2 + y^2)^{1/2}$,
	$\theta = \mathrm{Arg}\, z$	l'argument de z, défini par : $z = \lvert z\rvert \exp(\mathrm{i}\,\theta)$,
	$\bar{z}$	le complexe conjugué de z, donc $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$.

II. FONCTIONS

a) La Fonction sinus

Ensemble de définition

La fonction sin est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Périodicité

La fonction sin est périodique de période 2π.

On peut donc limiter le domaine d'étude à $[-\pi, \pi]$.

Parité

La fonction sin est impaire,

sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à O.

On peut donc limiter le domaine d'étude à $[0, \pi]$.

Dérivée

La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{(\sin(x))' = \cos(x)}$$

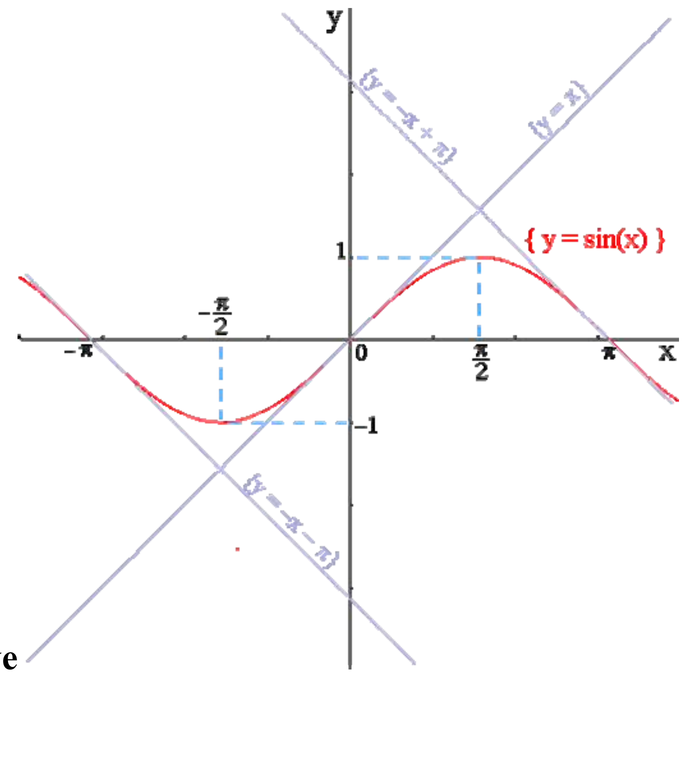
Limite usuelle

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \left[\frac{\sin(x)}{x}\right] = 1}$$

Tableau de variation

x	0		π/2		π
(sin(x))'	1	+	0	−	−1
sin(x)	0	↗	1	↘	0

Courbe représentative



b) La Fonction cosinus

Ensemble de définition

La fonction cosinus est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Périodicité

La fonction cos est périodique de période 2π. On peut donc limiter le domaine d'étude à $[-\pi, \pi]$.

Parité

La fonction cos est paire.
Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'axe (Oy).
On peut donc limiter le domaine d'étude à $[0, \pi]$.

Dérivée

La fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{(\cos(x))' = -\sin(x)}$$

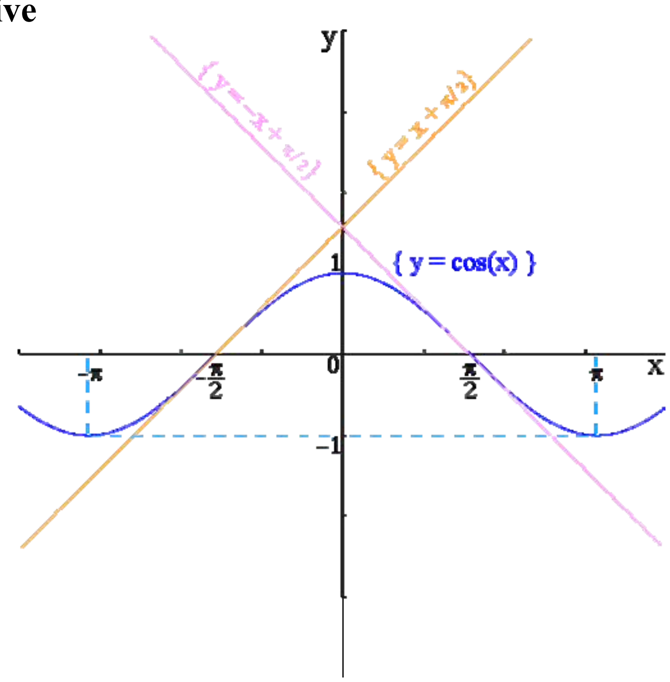
Limites usuelles

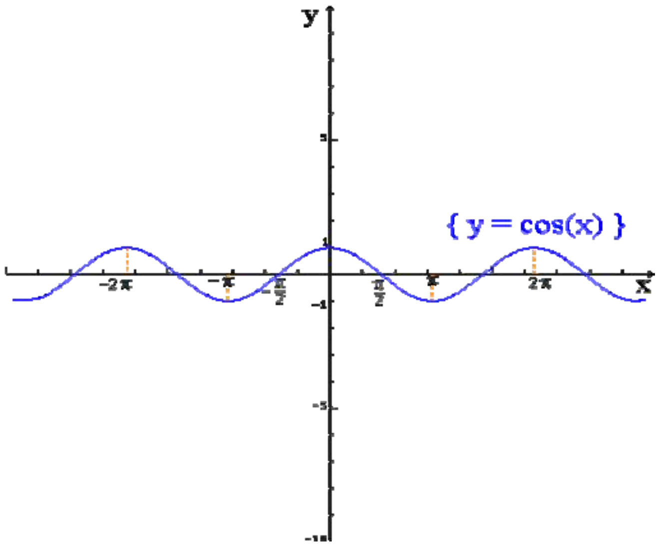
$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{1-\cos(x)}{x}\right] = 0 \qquad \lim_{x \to 0} \left[\frac{1-\cos(x)}{\left(\frac{x^2}{2}\right)}\right] = 1$$

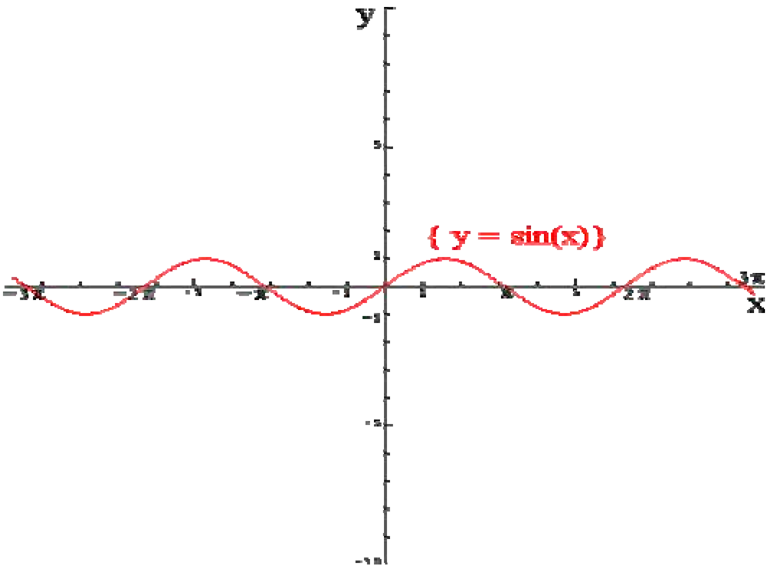
Tableau de variation

x	0		π/2		π
(cos(x))'	0	−	−1	−	0
cos(x)	1	↘	0	↘	−1

Courbe représentative







c) La Fonction tangente

Ensemble de définition

La fonction tan est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{(2k+1)\pi/2$, k dans $\mathbb{Z}\}$.

Périodicité

La fonction tan est périodique de période π.

On peut donc limiter le domaine d'étude à]-π/2, π/2[.

Parité

La fonction tan est impaire,

Donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à O.

On peut donc limiter le domaine d'étude à [0, π/2].

Dérivée

Si $x \in \mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + k\pi\}$, $\boxed{(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)}$

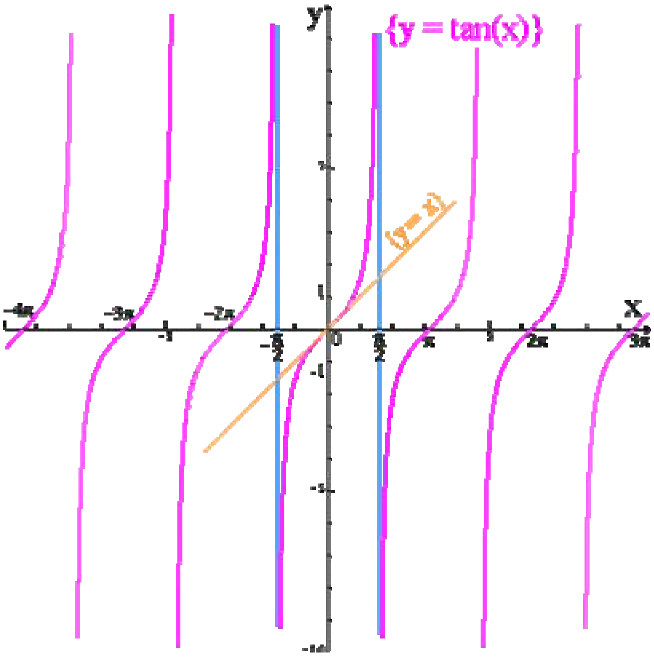
Limites usuelles

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{\tan(x)}{x}\right] = 1 \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$$

Tableau de variation

x	$-\pi/2$		0		$\pi/2$
$(\tan x)'$	‖	$+$	1	$+$	‖
$\tan x$	‖ $-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$ ‖

Courbe représentative



III.
1. Les Dérivées

1 Notion de dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On suppose que sa courbe représentative admette, au point A d'abscisse a, une tangente.

On appelle **nombre dérivé** de la fonction f en a le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a.

2 Calcul des dérivées

La fonction qui, à tout x de I, fait correspondre le nombre dérivé de f en x, est appelée **fonction dérivée** de f. Elle est notée f'.

Fonction f	Dérivée f'
$f(x) = a$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Si, sur un intervalle I, u et v sont deux fonctions admettant des dérivées u' et v' :

Fonction f	Dérivée f'
$f = u + v$	$f' = u' + v'$
$f = au$	$f' = au'$

3 Dérivée et sens de variation d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et admettant une dérivée f' sur I.

Si, pour tout x de I, $f'(x) > 0$, alors f est **croissante** sur I.

Si, pour tout x de I, $f'(x) < 0$, alors f est **décroissante** sur I.

Si, pour tout x de I, $f'(x) = 0$, alors f est **constante** sur I.

❶ Tableau des dérivées

Fonction f	Dérivée f'
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \sin(ax+b)$	$f'(x) = a\cos(ax+b)$
$f(x) = \cos(ax+b)$	$f'(x) = -a\sin(ax+b)$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = e^{ax+b}$	$f'(x) = ae^{ax+b}$

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, de dérivées respectives u' et v', on a aussi :

Fonction f	Dérivée f'
Produit : $f = uv$	$f' = u'v + uv'$
Inverse : $f = \frac{1}{u}$	$f' = -\frac{u'}{u^2}$
Quotient : $f = \frac{u}{v}$	$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

❷ Étude d'une fonction

Pour étudier une fonction f définie sur un intervalle I donné, on peut suivre les étapes suivantes :

• recherche de la **parité** et de la **périodicité** ;

• détermination du **sens de variation** (qui se résume par un tableau de variation) ;

• construction de la **courbe représentative** dans un repère avec prise en compte des éventuelles **symétries** liées à la parité et à la périodicité.

• indication de points particuliers (maximum, minimum), éventuellement des **asymptotes** et de quelques tangentes.

❸ Notation différentielle de la dérivée

La dérivée d'une fonction peut se noter $f'(x) = \frac{df}{dx}$

dx étant une variation suffisamment petite de la variable et df la variation correspondante de la fonction.

Exercices :

1 Tracer la courbe représentant la fonction f définie sur $[-1 ; 1]$ par $f(x) = 0{,}4x^2$. Tracer la tangente à cette courbe en son point d'abscisse 0,5 et déterminer le nombre dérivé de f en 0,5.

2 Soit la fonction f définie sur $[-2 ; 2]$ par

$$f(x) = -\frac{x^2}{4}.$$

Construire la courbe C représentative de f dans un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm sur Ox, 5 cm sur Oy).
Le nombre dérivé de f en 1 est $-0{,}25$. Construire la tangente à C au point M d'abscisse 1. En déduire le tracé de la tangente à C au point d'abscisse -1.

***

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions f suivantes :

3 $f(x) = -5x$; $f(x) = 2x^3$.

4 $f(x) = \dfrac{3}{x}$; $f(x) = -\dfrac{2}{x}$.

5 $f(x) = x^2 - 3x + 7$; $f(x) = -3x^2 + 5x - 1$.

6 $f(x) = x^3 + 5x^2$; $f(x) = 2x^3 - 4x + 6$.

7 $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - x\sqrt{2}$; $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{4}$.

8 $f(x) = x(x-2)$; $f(x) = (x+1)(x+2)$.

9 $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$; $f(x) = 2x^2 + \dfrac{4}{x}$.

10 $f(x) = 5x^3 - \dfrac{4}{x}$; $f(x) = x^3 + x - \dfrac{3}{x}$.

11 $f(x) = (4x+1)(3x-2)$; $f(x) = 3x(x-2)$.

12 $f(x) = x^2(3x+4)$; $f(x) = \dfrac{3}{x}(4x+1)$.

13 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer la fonction dérivée, puis le nombre dérivé en chacun des points précisés.
$f(x) = 9x - 1$, $(x = 1)$; $f(x) = x + 5x^2 + 9$, $(x = 0)$;
$f(x) = -x^3 + 4x + 1$, $(x = 1)$.
$f(x) = (x+1)(4-3x)$, $(x = -1)$; $f(x) = -5x^2 - \dfrac{3}{x}$, $(x = 2)$

Dans chacun des cas suivants, déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentant la fonction f au point dont l'abscisse est précisée. Donner une équation de la tangente en ce point.

14 $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$, $x = 3$.

15 $f(x) = 5x^2$, $x = 5$.

16 $f(x) = x^2 - x$, $x = 1$.

17 $f(x) = \dfrac{3}{x}$, $x = 2$.

***

Étudier le sens de variation des fonctions f suivantes sur l'intervalle précisé (on ne demande pas de tracer la courbe représentative).

18 $f(x) = 2x^2 - 1$, $x \in [-3 ; 3]$;
$f(x) = x^2 - 2x$, $x \in [-1 ; 3]$.

19 $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $x \in [0; 4]$.

20 $f(x) = x^3 - 3x^2$, $x \in [-1 ; 3]$.

21 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$, $x \in [-3 ; 2]$.

22 $f(x) = x^3 - 3x + 2$, $x \in [-2 ; 2]$.

***

Dans chacun des cas suivants, déterminer pour quelle valeur de x la fonction f présente un maximum ou un minimum sur l'intervalle précisé, et calculer sa valeur.

23 $f(x) = -3x^2 + 4$ sur $[-1 ; 1]$.

24 $f(x) = 4x^2 - 2x + 1$ sur $[0 ; 1]$.

25 $f(x) = x^3 - 3x$ sur $[0 ; 2]$.

26 $f(x) = x^3 + x^2 - x + 5$ sur $[-2 ; 0]$.

27 Construire la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 + x - 1$.

2. Les Primitives

Définition

Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I.
F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et si

$$\boxed{\forall x \in I, F'(x) = f(x)}$$

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I.

Théorème

Si F et G sont des primitives de f sur I, alors F–G est une fonction constante sur I.

Les Intégrales

Définition

Soient f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I, et F une primitive de f sur I.
On appelle intégrale de la fonction f de a à b le réel F(b) – F(a).

On le note $\boxed{\int_a^b f(t)\,dt}$

On note aussi : $\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = \left[F(t)\right]_a^b}$

Les réels a et b sont appelés bornes de l'intégrale.

Propriétés

$$\boxed{\int_a^a f(t)\,dt = 0}$$

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt}$$

Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur I , alors pour tous a, b et c ∈I, on a :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt}$$

Linéarité

Soit f et g deux fonctions continues sur I, alors ∀ a et b ∈I :

$$\boxed{\int_a^b [\,f(t) + g(t)\,]\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt}.$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\boxed{\int_a^b [\lambda\, f(t)]dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt}$.

Positivité

Soit f et g deux fonctions continues sur [a, b], (a ≤ b), alors :

$$\boxed{f \geq 0 \implies \int_a^b f(t)\,dt \geq 0}$$

$$\boxed{f \leq g \implies \int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt}$$

Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur [a, b], a ≤ b, alors ∀ m et M ∈ℝ:

$$\boxed{m \leq f \leq M \implies m\,(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M\,(b-a)}$$

$$\boxed{|f| \leq M \implies \left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq M\,(b-a)}$$

Valeur moyenne d'une fonction

Soit f une fonction continue sur [a, b], (a < b).

La valeur moyenne de f sur [a, b] est le réel : $\boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt}$

et ∃c ∈[a, b], tel que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$.

Théorème

Soit f une fonction continue sur I.

Toute primitive F de f sur I est définie par :

∀x∈I, $\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\,dt}$ où a est un réel de I dépendant de F.

Théorème

Si f est **dérivable sur I** et si a∈I, alors ∀x∈I, $\boxed{f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt}$

Intégration par parties

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur I, et si leurs dérivées u' et v' sont continues sur I, alors ∀ a et b ∈I :

$$\boxed{\int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt = \big[u(t)\,v(t)\big]_a^b - \int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt}$$

Tableau des primitives

Fonction f	Primitive F
$f(x) = 0$	$F(x) = C$ (fonction constante)
$f(x) = a$	$F(x) = ax + C$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$	$F(x) = -\frac{1}{x} + C$
$f(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$	$F(x) = \ln x + C$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$
$f(x) = e^{ax+b}$ $(a \neq 0)$	$F(x) = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + C$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C$

Exercices :

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1 $f(x) = 4x - 3$; $\quad g(x) = -x + 1.$

2 $f(x) = -\dfrac{1}{7}x - 12$; $\quad g(x) = 1 - 12x.$

3 $f(x) = 2x^2 - 5x + 4$; $\quad g(x) = -\dfrac{x^2}{2} + 3x - \dfrac{1}{2}.$

4 $f(x) = 0{,}1x^2 + 3$; $\quad g(x) = -\sqrt{3}x^2 - 1.$

5 $f(x) = \dfrac{2}{x^2}\ (x \neq 0)$; $\quad g(x) = -\dfrac{3}{x^2}\ (x \neq 0).$

6 $f(x) = \dfrac{3}{x}\ (x > 0)$; $\quad g(x) = -2x + \dfrac{1}{x}\ (x > 0).$

7 $f(x) = \dfrac{5 + 2x^3}{x}\ (x > 0)$; $\quad g(x) = \dfrac{1 - 3x}{x^2}\ (x > 0).$

8 $f(x) = 2e^x + 1$; $\quad g(x) = 3x - 4e^x.$

9 $f(x) = 1 - \sin x$; $\quad g(x) = 3\sqrt{2}\cos x.$

* * *

Pour chacune des fonctions f suivantes, trouver la primitive F qui vérifie la condition donnée :

10 $f(x) = x^2 - 3x + 1$; $\quad F(1) = 0.$

11 $f(x) = \dfrac{1}{3}x^2 - 7x + 5$; $\quad F(2) = 12.$

12 $f(x) = 1 + \dfrac{3}{x}\ (x > 0)$; $\quad F(1) = 3.$

13 $f(x) = -\dfrac{2}{x} + x + 1\ (x > 0)$; $\quad F(7) = 37{,}6.$

14 $f(x) = -\dfrac{4}{x} - \dfrac{2}{3}x^2\ (x > 0)$; $\quad F(1) = 0.$

15 $f(x) = x + e^x$; $\quad F(1) = 0{,}5.$

16 $f(x) = 220\sqrt{2}\cos x$; $\quad F(\dfrac{\pi}{4}) = 100.$

* * *

Calculer les intégrales suivantes :

17 $\displaystyle\int_0^2 3x\,dx$; $\quad \displaystyle\int_{-3}^3 3\left(\frac{x}{2} + 1\right)dx.$

18 $\displaystyle\int_{-1}^2 (3x - 4)\,dx$; $\quad \displaystyle\int_{-5}^0 \left(\frac{3x}{2} - 4\right)dx.$

19 $\displaystyle\int_0^2 (2x^2 - 3)^2\,dx$; $\quad \displaystyle\int_{-1}^1 (x + 1)^2\,dx.$

20 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{6}\,dx$; $\quad \displaystyle\int_{-1}^0 \left(\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{3}x\right)dx.$

21 $\displaystyle\int_1^2 \left(2 + \frac{3}{x^2}\right)dx$; $\quad \displaystyle\int_1^3 \frac{x^2 - 1}{x^2}\,dx.$

22 $\displaystyle\int_1^2 \frac{4}{x}\,dx$; $\quad \displaystyle\int_{0,5}^1 \left(2 - \frac{4}{x}\right)dx.$

23 $\displaystyle\int_0^3 3e^x\,dx$; $\quad \displaystyle\int_0^1 5(e^x - x)\,dx.$

24 $\displaystyle\int_{-2}^2 (-0{,}75x^2 + 3)\,dx$; $\quad \displaystyle\int_{-0,85}^{0,85} (-1{,}1x^2 + 2{,}6)\,d$

25 $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,dx$; $\quad \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx.$

26 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x\,dx$; $\quad \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,dx$;

27 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{12}} (1 - \sin x)\,dx$; $\quad \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx.$

* * *

Calculer les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ avec :

28 $f(x) = e^{-0{,}675x}$; $\quad a = -2{,}4$ et $b = 2{,}4.$

29 $f(x) = 0{,}15\sin x$; $\quad a = \dfrac{11\pi}{12}$ et $b = \pi.$

30 $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $\quad a = 1$ et $b = 5.$

31 Calculer l'intégrale :

$$I = \int_{5\times 10^{-3}}^{13\times 10^{-3}} (-8{,}45x + 39{,}575)\,dx.$$

* * *

Pour chacune des fonctions f suivantes, tracer la courbe représentative et calculer l'aire de la surface définie par l'ensemble des points M(x ; y) tels que : $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

32 $f(x) = -x^2 + 5x - 4$; $\quad a = 1$ et $b = 4.$

33 $f(x) = 0{,}25e^x + 2$; $\quad a = 0$ et $b = 2.$

34 $f(x) = x - \dfrac{1}{x}\ (x > 0)$; $\quad a = 1$ et $b = 4.$

35 $f(x) = e^x + e^{-x}$; $\quad a = -1$ et $b = 1.$

* * *

Le plan étant muni d'un repère orthonormal, tracer les courbes représentatives des fonctions f et g et calculer l'aire de la partie de plan limitée par les deux courbes :

3. Équations différentielles à coefficients constants

---

a) Equations du premiere ordre du type $y' = ay$ avec a réel

Soit a un réel. Par définition, une solution de l'équation différentielle $y' = ay$ est une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable et telle que $f'(x) = af(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La fonction nulle est une solution, de même que la fonction $f(x) = \exp(ax)$. Plus généralement, on a le résultat suivant :

Proposition 3.1.1 Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont exactement les fonctions (définies sur $\mathbb{R}$) $x \longmapsto \lambda \exp(ax)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Preuve : La preuve est facile. Pour λ quelconque fixé, la fonction $x \longmapsto \lambda \exp(ax)$ est évidemment solution. Réciproquement, si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation $y' = ay$, on considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x)\exp(-ax)$ qui est dérivable comme produit de fonctions dérivables. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h'(x) = (f'(x) - af(x))\exp(-ax).$$

Comme f vérifie $f' = af$, la fonction h' est donc identiquement nulle et donc h est constante. Si l'on note λ la valeur constante de la fonction h, on a alors

$$\lambda = f(x)\exp(-ax) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On obtient ainsi $f(x) = \lambda \exp(ax)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exemple : L'équation y' + 2y =0 ; y=f(x)=λ e^{-2x}

b) Equations du second ordre du type $y'' + ay = 0$ avec a réel

Soit a un réel. Par définition, une solution de l'équation différentielle $y'' + ay = 0$ est une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deux fois dérivable et telle que $f''(x) + af(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Il est immédiat de vérifier que la fonction identiquement nulle est solution, ainsi que les fonctions $x \longmapsto \sin(\sqrt{a}x)$ et $x \longmapsto \cos(\sqrt{a}x)$ dans le cas où $a > 0$.

Plus généralement, on a les résultats suivants à retenir :

Proposition 3.1.2 (équation $y'' = 0$) Les solutions de l'équation $y'' = 0$ sont les fonctions de la forme : $x \longmapsto \lambda x + \mu$ avec λ et μ réels.

Proposition 3.1.3 (équation $y'' + ay = 0$ avec $a \neq 0$) Soit a un réel non nul. Les solutions de l'équation différentielle $y'' + ay = 0$ dépendent du signe de a et sont données par les expressions suivantes :

1. Si $a > 0$, les solutions sont de la forme :

$$x \longmapsto \lambda \cos(\sqrt{a}x) + \mu \sin(\sqrt{a}x)$$ où λ, μ sont des réels.

2. Si $a < 0$, les solutions sont de la forme :

$$x \longmapsto \lambda \exp(\sqrt{-a}x) + \mu \exp(-\sqrt{-a}x)$$ où λ, μ sont des réels.

c) Equations du second ordre du type $y'' + by' + cy = 0$ avec b, c réels

Soient b, c deux nombres réels. Une solution de l'équation différentielle $y'' + by' + c = 0$ est une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et telle que $f''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dans le paragraphe précédent, nous avons traité le cas où le coefficient de y' est nul. Dans le cas où $b \neq 0$ la méthode de résolution consiste d'abord à étudier le polynôme du second degré $X^2 + bX + c$ qui admet toujours deux racines réelles ou complexes, éventuellement confondues.

L'équation $X^2 + bX + c = 0$ est appelée **équation caractéristique** de $y'' + by' + cy = 0$. Le résultat à retenir est le suivant :

Proposition 3.1.4 (équation $y'' + by' + cy = 0$) Les solutions de cette équation différentielle sont données en fonction des racines du polynôme $P(X) = X^2 + bX + c$.

1. Si les racines de $P(X)$ sont r_1 et r_2 deux réels distincts, les solutions sont les fonctions (définies sur $\mathbb{R}$) de la forme :

$$x \longmapsto \lambda \exp(r_1 x) + \mu \exp(r_2 x) \quad \text{où } \lambda, \mu \text{ sont des réels}.$$

2. Si $P(X) = 0$ a une racine réelle double r, les solutions sont les fonctions (définies sur $\mathbb{R}$) de la forme :

$$x \longmapsto (\lambda x + \mu)\exp(rx) \quad \text{où } \lambda, \mu \text{ sont des réels}.$$

3. Si les racines de $P(X)$ sont complexes (nécessairement conjuguées) et de la forme $r + is$ et $r - is$ (avec $r, s \in \mathbb{R}$) les solutions sont les fonctions (définies sur $\mathbb{R}$) de la forme :

$$x \longmapsto (\lambda \cos(sx) + \mu \sin(sx))\exp(rx) \quad \text{où } \lambda, \mu \text{ sont des réels}.$$

Remarques :

1. S'il y a une racine réelle double r, elle est nécessairement réelle car $r = -b/2$.
2. Chacune des trois expressions données dans la proposition précédente est de la forme $f = \lambda u + \mu v$, où u et v sont deux solutions de l'équation $y'' + by' + cy = 0$. Plus généralement on a le résultat suivant :

   Proposition 3.1.5 Soient u et v deux solutions non nulles de l'équation différentielle $y'' + by' + cy = 0$. Si ces solutions ne sont pas proportionnelles, c'est à dire s'il n'existe pas de constante $k \in \mathbb{R}$ telle que $u(x) = kv(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors les solutions de $y'' + by' + cy = 0$ sont les fonctions $\lambda u + \mu v$ où λ et μ sont des réels.

Equation $y'' + by' + cy = f$

On étudie maintenant l'équation

$$(E) \quad y'' + by' + cy = f,$$

dans laquelle b et c désignent toujours deux nombres réels et où f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Méthode de résolution

La méthode de résolution comporte toujours les deux étapes suivantes :

- **Première étape** : Déterminer la solution générale y_0 de l'équation sans second membre

  $$(E_0) \quad y'' + by' + cy = 0.$$

  Cette solution est donnée par la Proposition 3.1.4.

- **Deuxième étape** : Déterminer une solution particulière g de l'équation (E).

La solution générale y de (E) est alors $y = g + y_0$, ce qu'on écrit :

$$\text{Solution générale de } (E) = \text{Solution générale de } (E_0) + \text{Solution particulière de } (E).$$

Recherche d'une solution particulière

Les cas à connaître sont ceux où la fonction f du second membre est de l'une des trois formes suivantes :

1. 1er cas : $f(x) = P(x)$ (P désigne un polynôme).
2. 2ème cas : $f(x) = \exp(\alpha x)P(x)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. 3ème cas : $f(x) = \exp(\alpha x)P(x)(K_1 \cos(\beta x) + K_2 \sin(\beta x))$ où $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$.

Pour des fonctions f plus générales, il existe d'autres méthodes qu'on ne verra pas ici.

Nous donnons maintenant les règles permettant de trouver une solution particulière de (E) dans chacun de ces cas. On désigne toujours par P un polynôme et par $d^\circ P$ son degré.

1er cas : $y'' + by' + cy = P$.

On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme Q avec :

$$d^\circ Q = \begin{cases} d^\circ P & \text{si} \quad c \neq 0 \\ d^\circ P + 1 & \text{si} \quad c = 0, b \neq 0 \;\; (y'' + by' = P) \\ d^\circ P + 2 & \text{si} \quad c = 0 = b \;\; (y'' = P) \end{cases}$$

2ème cas : $y'' + by' + cy = f$ où $f(x) = \exp(\alpha x)P(x)$, α réel non nul.

Il y a trois possibilités suivant que α est ou non une racine de l'équation caractéristique $X^2 + bX + c = 0$.

- Si α n'est pas racine de $X^2 + bX + c = 0$, on cherche une solution particulière sous la forme :

$$g(x) = \exp(\alpha x)Q(x) \quad \text{avec } d^\circ Q = d^\circ P.$$

- Si α est une racine **simple** de $X^2 + bX + c = 0$, on cherche une solution particulière sous la forme :

$$g(x) = \exp(\alpha x)xQ(x) \quad \text{avec } d^\circ Q = d^\circ P.$$

- Si α est une racine **double** de $X^2 + bX + c = 0$, on cherche une solution particulière sous la forme :

$$g(x) = \exp(\alpha x)x^2Q(x) \quad \text{avec } d^\circ Q = d^\circ P.$$

3ème cas : $y'' + by' + cy = f$ où $f(x) = \exp(\alpha x)P(x)(K_1 \cos(\beta x) + K_2 \sin(\beta x))$, β réel non nul (néanmoins, le cas $\alpha = 0$ est possible).

- Si $\alpha + i\beta$ n'est pas racine de $X^2 + bX + c = 0$, on cherche une solution particulière sous la forme :

$$g(x) = \exp(\alpha x)(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)) \quad \text{avec } d^\circ Q_1 = d^\circ Q_2 = d^\circ P.$$

- Si $\alpha + i\beta$ est racine de $X^2 + bX + c = 0$, on cherche une solution particulière sous la forme :

$$g(x) = x\exp(\alpha x)(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)) \quad \text{avec } d^\circ Q_1 = d^\circ Q_2 = d^\circ P.$$

Cas où le second membre est somme de fonctions

Supposons par exemple que l'équation soit

$$(E) \quad y'' + by' + cy = f_1 + f_2 + f_3.$$

La méthode pour trouver dans ce cas une solution particulière de (E) consiste à chercher successivement une solution particulière pour chacune des équations suivantes :

$$\begin{aligned} (E_1) &\quad y'' + by' + cy = f_1 \\ (E_2) &\quad y'' + by' + cy = f_2 \\ (E_3) &\quad y'' + by' + cy = f_3. \end{aligned}$$

Si g_1 est une solution particulière de (E_1), si g_2 est une solution particulière de (E_2) et si g_3 est une solution particulière de (E_3), la fonction $g = g_1 + g_2 + g_3$ est alors une solution particulière de (E).

En effet, nous avons

$$\begin{aligned} g_1'' + bg_1' + cg_1 &= f_1 \\ g_2'' + bg_2' + cg_2 &= f_2 \\ g_3'' + bg_3' + cg_3 &= f_3. \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre et en regroupant en facteur, on obtient :

$$(g_1 + g_2 + g_3)'' + b(g_1 + g_2 + g_3)' + c(g_1 + g_2 + g_3) = f_1 + f_2 + f_3.$$

Exercices sur les équations différentielles

Exercice 1 Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $2y' - 3y = 0,$ b) $y' + 2y = 0,$ c) $y'' + y' = 0,$

d) $y'' - 4y' + 3y = 0,$ e) $y'' + y' + y = 0$ et f) $y'' - 6y' + 9y = 0.$

Exercice 2 Trouver la solution de l'équation différentielle

$$y'' + y' - 12y = 0$$

qui vérifie $y(2) = 2$ et $y'(2) = 0$.

Même question avec l'équation

$$\theta'' + 9\theta = 0$$

et les conditions $\theta(\pi/2) = 0$ et $\theta'(\pi/2) = 3$.

Exercice 3 Intégrer les équations différentielles suivantes :

a) $y'' + y = \cos^2 x,$ b) $y'' - 2y' + 5y = 10\cos x,$

c) $y'' + y' - 2y = \cos x + \operatorname{ch} x,$ d) $y'' - 2y' + y = e^x(x^2 + 1),$

e) $y'' - 3y' + 2y = e^x \sin 3x$ et f) $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}(x^2 + 1).$

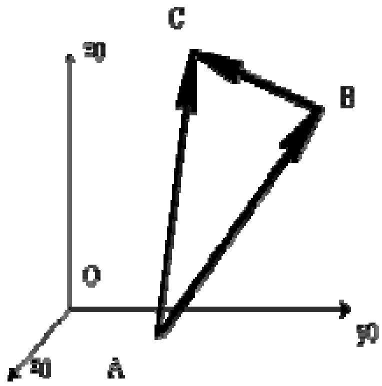
Exercice 4 Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'' + y' - 6y = \sin(2x) + e^{2x}$ (

b) $y'' + 3y' + 2y = 2x\operatorname{ch}(x)$ (

c) $y'' - 3y' + 2y = 2000$ (

4. LES VECTEURS



1- VECTEURS
On associe à l'espace ponctuel euclidien à trois dimensions E, l'espace vectoriel à trois dimensions E sur le corps des réels R:
· E3 ® E3

· (A,B,C) ® $(\vec{V}_1,\vec{V}_2,\vec{V}_3)$

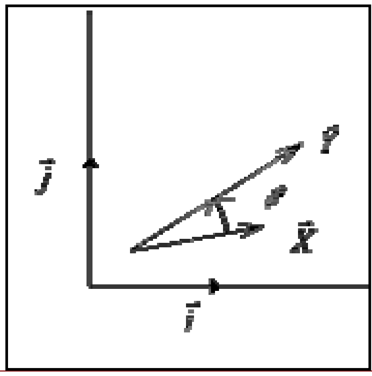
On associe au couple ordonnée de points (A,B) de E2 un élément $\vec{AB} \in E$ définissant un vecteur libre

2- OPERATIONS SUR LES VECTEURS
21- Produit Scalaire

· E® R
· $(\vec{X},\vec{Y})$ ® $\vec{X}.\vec{Y} = a$

Dans une base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, si $\vec{X} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$ et $\vec{Y} = y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k}$, alors on aura

$$\boxed{\vec{X}.\vec{Y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}$$



Remarque:
· Le résultat du produit scalaire de deux vecteurs est un SCALAIRE.

· Propriétés:

· Commutativité: $\vec{X}.\vec{Y} = \vec{Y}.\vec{X}$

· Distributivité à droite et à gauche: $\vec{X}.(\vec{Y}+\vec{Z}) = \vec{X}.\vec{Y} + \vec{X}.\vec{Z}$ et $(\vec{X}+\vec{Y}).\vec{Z} = \vec{X}.\vec{Z} + \vec{Y}.\vec{Z}$

· Multiplication par un réel: $\lambda(\vec{X}.\vec{Y}) = (\lambda\vec{X}).\vec{Y} = \vec{X}.(\lambda\vec{Y})$

· Calcul pratique d'un produit scalaire:
si on définit l'angle $\theta = (\vec{X},\vec{Y})$, alors $\vec{X}.\vec{Y} = \|\vec{X}\|\|\vec{Y}\|\cos\theta$

· Normes: $\|\vec X\| = \sqrt{\vec X.\vec X} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

· Calculs sur les vecteurs d'une base orthonormée directe:

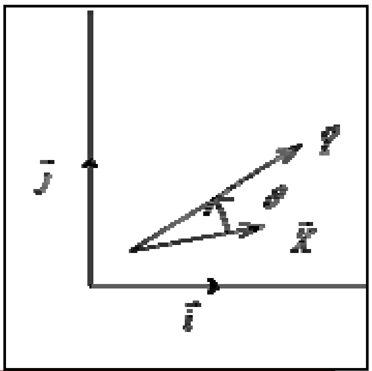
$\vec i.\vec j = \vec j.\vec k = \vec k.\vec i = 0$

$\vec i.\vec i = \vec j.\vec j = \vec k.\vec k = 1$

22- Produit Vectoriel

· E² ® E
. $(\vec X,\vec Y)$ ® $\vec X \wedge \vec Y = \vec A$

Dans une base $(\vec i,\vec j,\vec k)$, si $\vec Y = y_1\vec i + y_2\vec j + y_3\vec k$, alors on



$\vec X = x_1\vec i + x_2\vec j + x_3\vec k$ et aura

$$\vec X \wedge \vec Y = (x_2y_3 - x_3y_2)\vec i + (x_3y_1 - x_1y_3)\vec j + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec k$$

· Méthode de calcul:

Calcul à effectuer: $\left|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right. \wedge \left|\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix}\right.$

Première composante: On barre la première ligne et on calcule le déterminant 2*2 restant:

$$\left|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right. \wedge \left|\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix}\right. \rightarrow \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = x_2y_3 - x_3y_2 \rightarrow \left|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right. \wedge \left|\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ ? \\ ? \end{matrix}\right.$$

Deuxième composante: On barre la deuxième ligne et on calcule l'opposé du déterminant 2*2 restant:

$$\left|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right. \wedge \left|\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix}\right. \rightarrow -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = -(x_1y_3 - x_3y_1) \rightarrow \left|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right. \wedge \left|\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ ? \end{matrix}\right.$$

Troisième composante: On barre la troisième ligne et on calcule le déterminant 2*2 restant:

$$\left|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right. \wedge \left|\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix}\right. \rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1 \rightarrow \left|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right. \wedge \left|\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{matrix}\right.$$

Remarque:
· Le résultat du produit vectoriel de deux vecteurs est un VECTEUR perpendiculaire aux deux vecteurs .

· Propriétés:

· Anticommutativité: $\vec X \wedge \vec Y = -\vec Y \wedge \vec X$

· Distributivité à droite et à gauche: $\vec X \wedge (\vec Y + \vec Z) = \vec X \wedge \vec Y + \vec X \wedge \vec Z$ et $(\vec X + \vec Y) \wedge \vec Z = \vec X \wedge \vec Z + \vec Y \wedge \vec Z$

· Multiplication par un réel: $\lambda(\vec X \wedge \vec Y) = (\lambda \vec X) \wedge \vec Y = \vec X \wedge (\lambda \vec Y)$

· Calcul pratique du produit vectoriel:

si on définit l'angle $\theta = (\vec{X},\vec{Y})$, alors $\vec{X} \wedge \vec{Y} = \vec{Z} = \|\vec{X}\|.\|\vec{Y}\|.\sin\theta\,\vec{k}$, et $(O\vec{X}, O\vec{Y}, O\vec{k})$ forme un trièdre direct, quelque soit le point O.

· Calculs sur les vecteurs d'une base orthonormée directe:

$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$

$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$

23- Produit Mixte

· E3 ® R

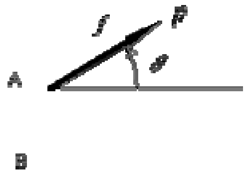
· $(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})$ ® $\vec{X}.(\vec{Y} \wedge \vec{Z}) = a$

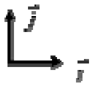
Remarque:
· Le résultat du produit mixte de trois vecteurs est un SCALAIRE.

· Propriétés:

· $\vec{X}.(\vec{Y} \wedge \vec{Z}) = 0$ si l'un des vecteurs est une combinaison linéaire des deux autres.

· $\vec{X}(\vec{Y} \wedge \vec{Z}) = \vec{Y}(\vec{Z} \wedge \vec{X}) = \vec{Z}(\vec{X} \wedge \vec{Y})$





3- NOTIONS SUR LES TORSEURS

31- Définition

Un torseur est un champ de vecteurs, antisymétrique de E. Un torseur $[T]_A$ en un point A est défini par:

· Un vecteur libre $\vec{R}$ appelé Résultante du torseur

· Un vecteur libre $\vec{M}_{(A)}$ appelé Moment du torseur en A et vérifiant:

$$\forall (A, B) \quad \vec{M}_{(B)} = \vec{M}_{(A)} + \vec{R} \wedge \vec{AB}$$

Remarque:
· La résultante du torseur est indépendante du point où est défini un torseur.

32- Application des torseurs à la représentation d'un champ de force

Soit un champ de force défini dans l'espace à trois dimensions de base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par la donnée de la force $\vec{F}$ appliquée en un point $A(2,3,0)$:

$\vec{F} = \|\vec{F}\|\cos\theta\,\vec{i} + \|\vec{F}\|\sin\theta\,\vec{j}$ ou $\vec{F}(f\cos\theta, f\sin\theta, 0)$

Le moment de la force $\vec{F}$ en son point d'application A est nul d'où: $\vec{M}_{F(A)} = \vec{0}$ .Si on veut calculer le moment de la force $\vec{M}_{F(B)}$ au point $B(2,1,0)$, on obtient $\vec{M}_{F(B)} = -2f\cos\theta\,\vec{k}$ (intensité de la force f multiplié par le bras de levier $2\cos\theta$, sens négatif).

En appliquant la notion de torseur, on peut définir le torseur force $[F]_A$ au point A, associé à $\vec{F}$ par:

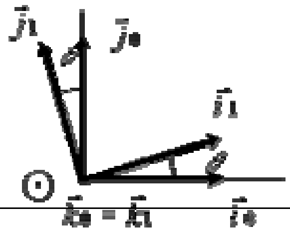
· la résultante du torseur force $[F]_A$ égale à la force $\vec{F}$

· le moment en A du torseur force $[F]_A$ égal à $\vec{M}_{F(A)} = \vec{0}$

Le moment au point $\vec{F}$ est défini par la formule de transport donnée plus haut soit:

$$\vec{M}_{F(B)} = \vec{M}_{F(A)} + \vec{F} \wedge \vec{AB} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f\cos\theta \\ f\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -2f\cos\theta \end{vmatrix}$$

ou:



$$\boxed{\vec{M}_{R,B} = -2j\cos\theta\,\vec{k}}$$

Remarques:
· La notion de torseur de force permet donc de parler globalement d'une force et de son moment en tout point de l'espace.
· Les deux vecteurs définis dans un torseur sont de natures différentes. Pour un torseur de force, le vecteur résultant est une force ayant des composantes dont les unités sont des (N), alors que le moment en un point est un moment dont les composantes ont des unités en (N.m).
· Attention quand l'on demande de définir un torseur , il est nécessaire de donner une réponse pour la résultante et une réponse pour le moment.

4- CHANGEMENTS DE BASES

Soient deux bases orthonormées directes $b_0(\vec{i}_0,\vec{j}_0,\vec{k}_0)$ et $b_1(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$ et telles que $\vec{k}_0=\vec{k}_1$

41- Projection des vecteurs de bases

Si on exprime les vecteurs de la base $b_1(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$ dans $b_0(\vec{i}_0,\vec{j}_0,\vec{k}_0)$, on obtient:

. $\vec{i}_1=\cos\theta.\vec{i}_0+\sin\theta.\vec{j}_0$

. $\vec{j}_1=-\sin\theta.\vec{i}_0+\cos\theta.\vec{j}_0$

. $\vec{k}_1=\vec{k}_0$

Inversement, si on exprime les vecteurs de la base $b_0(\vec{i}_0,\vec{j}_0,\vec{k}_0)$ dans $b_1(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$, on obtient:

. $\vec{i}_0=\cos\theta.\vec{i}_1-\sin\theta.\vec{j}_1$

. $\vec{j}_0=\sin\theta.\vec{i}_1+\cos\theta.\vec{j}_1$

. $\vec{k}_0=\vec{k}_1$

42- Changements de bases d'un vecteur quelconque

Soit $\vec{U}(a,b,c)_{b1}$ un vecteur exprimé dans la base $b_1(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$. L'expression de $\vec{U}$ dans la base $b_0(\vec{i}_0,\vec{j}_0,\vec{k}_0)$ sera:

$$\vec{U}=a.\vec{i}_1+b.\vec{j}_1+c.\vec{k}_1=a(\cos\theta.\vec{i}_0+\sin\theta.\vec{j}_0)+b.(-\sin\theta.\vec{i}_0+\cos\theta.\vec{j}_0)+c.\vec{k}_0$$

$$=(a.\cos\theta-b\sin\theta).\vec{i}_0+(a.\sin\theta+b\cos\theta).\vec{j}_0+c.\vec{k}_0$$

d'où:

$$\boxed{\vec{U}(a.\cos\theta-b\sin\theta,a.\sin\theta+b.\cos\theta,c)_{b0}}$$

IV. Statique

Objectifs :

- Modéliser mathématiquement une action mécanique ;
- Calculer un moment ;
- Décrire une action mécanique par un torseur en un point ;
- Déterminer l’action mécanique transmissible par une liaison mécanique parfaite.

1. Définition d'une action mécanique

D'une façon générale, on appelle action mécanique toute cause physique susceptible de maintenir un corps au repos, de créer, de maintenir ou de modifier un mouvement, de déformer un corps.

2. Classification des actions mécaniques

Les actions mécaniques sont de deux sortes:

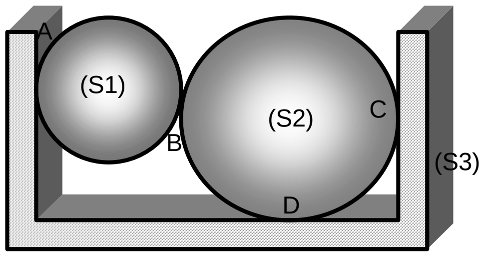
- Les actions mécaniques à distance (champ de pesanteur, champ électromagnétique)
- Les actions mécaniques de contact (liaisons surfaciques…)

On distingue les actions mécaniques **extérieures** et **intérieures** à un ensemble de corps.

Soient 3 solides (S_1), (S_2), (S_3).
Soit (E) l'ensemble constitué par les 2 corps (S_1) et (S_2).

Bilan des actions mécaniques extérieures qui agissent sur le solide (E) :

- Poids
- Action de (S_3) sur (E)



3. Le torseur d'action mécanique

3.1. Notion de force

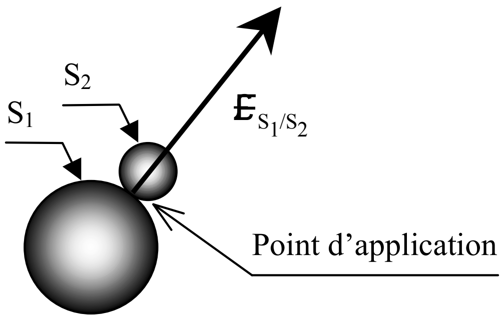
On appelle **force**, l'action mécanique qui s'exerce mutuellement entre deux particules élémentaires, pas forcément en contact.

Une force est toujours appliquée en un point. Elle est modélisée par un vecteur, caractérisé par :

- Un point d'application ;
- Une direction ;
- Un sens ;
- Une norme (intensité).

Unité : Newton

Notation : $\vec{F}_{\text{solide extérieur} \to \text{solide isolé}}$



3.2. Notion de moment

3.2.1. Moment d'une force par rapport à un point

Les effets physiques d'une A.M. dépendent de la position et de l'orientation dans l'espace de la force $\vec{F}$ associée à cette A.M. On est amené à introduire la notion **de moment de la force $\vec{F}$** pour caractériser complètement l'A.M.

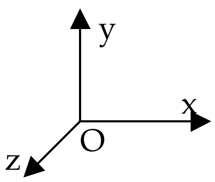
On appelle moment par rapport au point A de la force $\vec{F}_{1\to 2}$ appliquée au point M, le vecteur d'origine A défini par la relation :

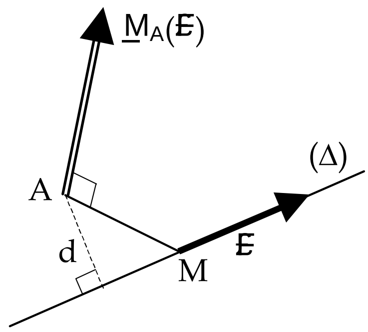
$$\overrightarrow{M_A}(\vec{F}_{1\to 2}) = \overrightarrow{AM} \times \vec{F}_{(1\to 2)}$$

Unité : Newton-mètre (Nm)

Corollaire : La relation ci-dessus reste valable pour n'importe quel point B appartenant à la direction (Δ) de $\vec{F}$:

$$\forall B \in \Delta,\quad \overrightarrow{M_A}(\vec{F}_{1\to 2}) = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}_{(1\to 2)}$$





3.2.2. Autre formule : Bras de levier

$$\|\overrightarrow{M_A}(\vec{F}_{\text{solide 1}\to\text{solide 2}})\| = d.\ \|\vec{F}_{(\text{solide 1}\to\text{solide 2})}\|$$

3.2.3. Définition géométrique du vecteur $\overrightarrow{M_A}(\vec{F}_{solide\,1 \rightarrow solide\,2})$

- origine : point A
- direction : perpendiculaire au plan ($\vec{F}_{solide\,1 \rightarrow solide\,2}$; $\overrightarrow{AM}$)
- sens : $\overrightarrow{AM}$, $\vec{F}_{solide\,1 \rightarrow solide\,2}$ et $\overrightarrow{M_A}$ forment un trièdre direct

3.2.4. Relation fondamentale sur les moments

Soit $\vec{F}_{solide\,1 \rightarrow solide\,2}$ une force appliquée en M, et deux points quelconques A et B. On sait, par définition, que :

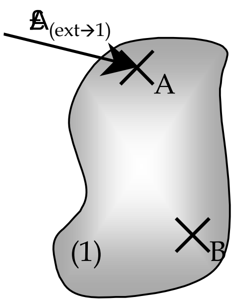
$$\overrightarrow{M_A}(\vec{F}_{solide\,1 \rightarrow solide\,2}) = \overrightarrow{AM} \times \vec{F}(_{solide\,1 \rightarrow solide\,2})$$

Et

$$\overrightarrow{M_B}(\vec{F}_{solide\,1 \rightarrow solide\,2}) = \overrightarrow{BM} \times \vec{F}(_{solide\,1 \rightarrow solide\,2})$$

Or $\overrightarrow{\mathbf{BM}} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}$, par conséquent :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{M_B}}(\vec{F}_{sol.\,1 \rightarrow sol.\,2}) = \overrightarrow{M_A}(\vec{F}_{sol.\,1 \rightarrow sol.\,2}) + \overrightarrow{BA} \times \vec{F}(_{sol.\,1 \rightarrow sol.\,2})}$$



3.3. Champ de l'action mécanique d'une force sur un solide

L'action mécanique sur un solide 1 exercée par une force $\vec{A}_{(ext \rightarrow 1)}$ appliquée en un point A de ce solide, se modélise en un point B quelconque par deux champs :

- un champ uniforme défini par $\vec{R}_{(ext \rightarrow 1)} = \vec{A}_{(ext \rightarrow 1)}$ appelé **Résultante générale.**
- un champ de moment défini en tout point B par : $\overrightarrow{M_B}(\vec{A}_{(ext \rightarrow 1)}) = \overrightarrow{BA} \times \vec{A}_{(ext \rightarrow 1)}$ appelé **Moment résultant.**

3.4. Torseur associé à l'action mécanique d'une force

Pour définir complètement une A.M. nous avons donc besoin des vecteurs $\vec{R}_{(ext \rightarrow 1)}$ et $\overrightarrow{M_B}(\vec{A}_{(ext \rightarrow 1)})$.

L'ensemble des deux vecteurs $\vec{R}_{(ext \rightarrow 1)}$ et $\overrightarrow{M_B}(\vec{A}_{(ext \rightarrow 1)})$, définis en tout point B, est appelé **torseur** associé à l'action mécanique relative à la force $\vec{A}_{(ext \rightarrow 1)}$.

Il est noté :

Composantes de la résultante

Composantes du moment

$$\{\tau_{(ext \rightarrow 1)}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}(ext \rightarrow 1) \\ \overrightarrow{MB}(ext \rightarrow 1) \end{matrix} \right\}_{B,R} = \left\{ \begin{matrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{matrix} \right\}_{B,R}$$

Point de réduction

Repère de projection

<u>Remarques :</u>

- Le point B n'est pas nécessairement un point appartenant au solide 1 ;
- $\vec{R}_{(ext \rightarrow 1)}$ et $\overrightarrow{M_B}_{(ext \rightarrow 1)}$ sont appelés *éléments de réduction* du torseur $\{\tau_{(ext \rightarrow 1)}\}$;

3.5. Actions mécaniques particulières

3.5.1. Torseur glisseur

On appelle **torseur glisseur**, tout torseur associé à une action mécanique dont le moment est nul en un point.

$$\{\tau_{(ext \to 1)}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(ext \to 1) \neq \vec{0} \\ \vec{MA}(ext \to 1) = \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

3.5.2. Torseur couple

On appelle **torseur couple**, tout torseur associé à une action mécanique dont la résultante est nulle.

$$\{\tau_{(ext \to 1)}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{MA}(ext \to 1) \neq \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

Remarque : les éléments de réduction d'un torseur couple sont les mêmes en tout point.

3.6. Théorème du changement de centre de réduction – Somme de deux torseurs

3.6.1. Changement de centre de réduction

Soit : $\{\tau_{(ext \to 1)}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(ext \to 1) \\ \vec{MA}(ext \to 1) \end{Bmatrix}_A$

au point B : $\{\tau_{(ext \to 1)}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(ext \to 1) \\ \vec{MB}(ext \to 1) \end{Bmatrix}_B$

Avec : $M_{B\,(ext \to 1)} = M_{A\,(ext \to 1)} + BA \times R_{(ext \to 1)}$

3.6.2. Somme de deux torseurs

Soient : $\{\tau_{(1 \to 2)}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(1 \to 2) \\ \vec{MA}(1 \to 2) \end{Bmatrix}_A$

et $\{\tau_{(3 \to 2)}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(3 \to 2) \\ \vec{MA}(3 \to 2) \end{Bmatrix}_A$

alors :

$$\{\tau_{(1 \to 2)}\} + \{\tau_{(3 \to 2)}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(1 \to 2) + \vec{R}(3 \to 2) \\ \vec{MA}(1 \to 2) + \vec{MA}(3 \to 2) \end{Bmatrix}_A$$

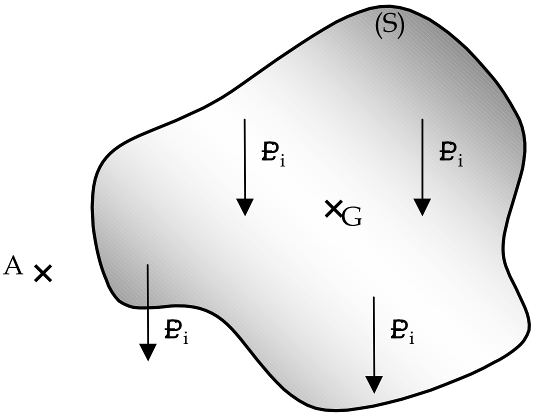
Remarque importante : La somme de deux torseurs implique que les éléments de réduction de ceux-ci **soient considérés au même point**.

4. Modélisation des actions à distance

4.1. Définition

L'action mécanique de 1 sur 2 est dite « à distance », si elle ne résulte pas d'une liaison mécanique entre 1 et 2.

4.2. Cas du champ de pesanteur



en un point quelconque A :

$$\{\tau_{(pes \to S)}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(pes \to S) = \sum_{i=1}^{n} \vec{p_i} = \vec{P} \\ \vec{M}_{G}(pes \to S) = \sum_{i=1}^{n} (\vec{AM_i} \times \vec{p_i}) \end{Bmatrix}_{A,R}$$

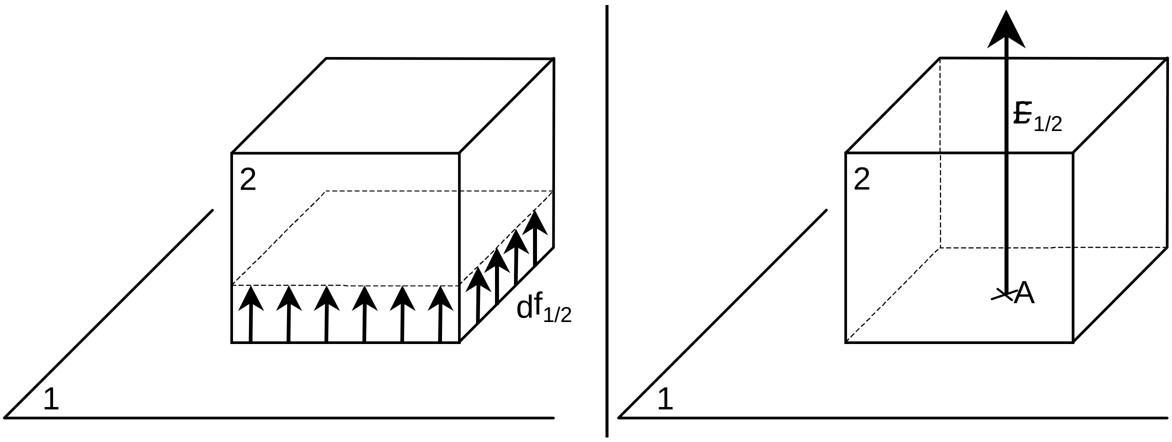
au centre de gravité G :

$$\{\tau_{(pes \to S)}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(pes \to S) = \vec{P} \\ \vec{MG}(pes \to S) = \vec{0} \end{Bmatrix}_{G,R}$$

5. Modélisation de l'action mécanique de surface

5.1. Action de surface entre deux solides

Actions réelles appliquées de 1 sur 2 | Modélisation de ces actions

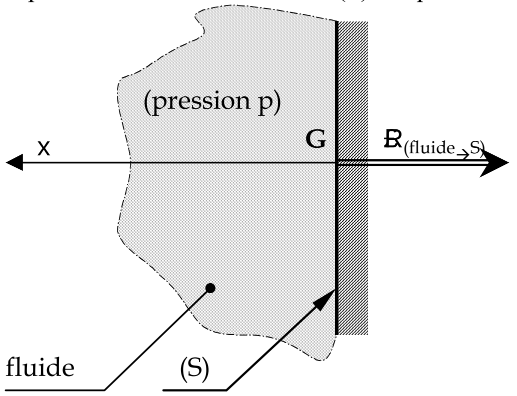


L'action mécanique de contact surfacique est modélisable par un vecteur $F_{1/2}$ tel que :

- Point d'application : A ;
- Direction : perpendiculaire au plan tangent commun ;
- Sens : de 1 vers 2
- Intensité : $\| \mathbf{F_{1/2}} \| = \Sigma\ \mathbf{df_{1/2}}$

5.2. Action mécanique due à la pression d'un fluide sur une surface plane

Les actions mécaniques de contact d'un fluide sur une surface plane (S) peuvent se modéliser par un torseur d'action mécanique au centre G de la surface (S) tel que :



$$\{\tau_{(\text{fluide} \to S)}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(f \to S) = -p.S.\vec{x} \\ \vec{MG}(f \to S) = \vec{0} \end{Bmatrix}_G$$

avec :

- p : pression du fluide, exercée sur la surface (S). Cette pression est supposée uniforme ;
- S : aire de (S) ;

x : normale extérieure à la paroi. τ&&&

Unités légales :	Autres unités :	Unités pratiques :
p en Pa	p en MPa	p en bars
S en m²	S en mm²	S en cm²
‖ R‖ en N	‖ R‖ en N	‖ R‖ en saN

1 MPa = 10^6 Pa = 1 N/mm² = 10 b

6. Action transmissible par une liaison parfaite (dans l'espace)

Soient 1 et 2 deux solides en contact.

6.1. Hypothèses

Une liaison parfaite entre deux solides 1 et 2 est caractérisée par :

- Des surfaces de liaison géométriquement parfaites et indéformables ;
- Des ajustements sans jeu ;
- Des contacts sans frottement.

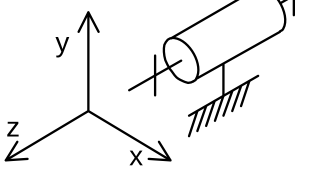
6.2. Relation avec les degrés de liberté d'une liaison

Les mouvements possibles du solide 2 par rapport au solide 1 sont notés R_x, R_y et R_z (rotations) et T_x, T_y et T_z (translations).

Si un mouvement (rotation ou translation) est possible suivant un axe, alors il n'y a pas de composante d'effort (respectivement couple ou force) transmissible suivant cet axe.

<u>NB</u> : La liaison glissière hélicoïdale est une exception.

6.3. Exemple : La liaison pivot



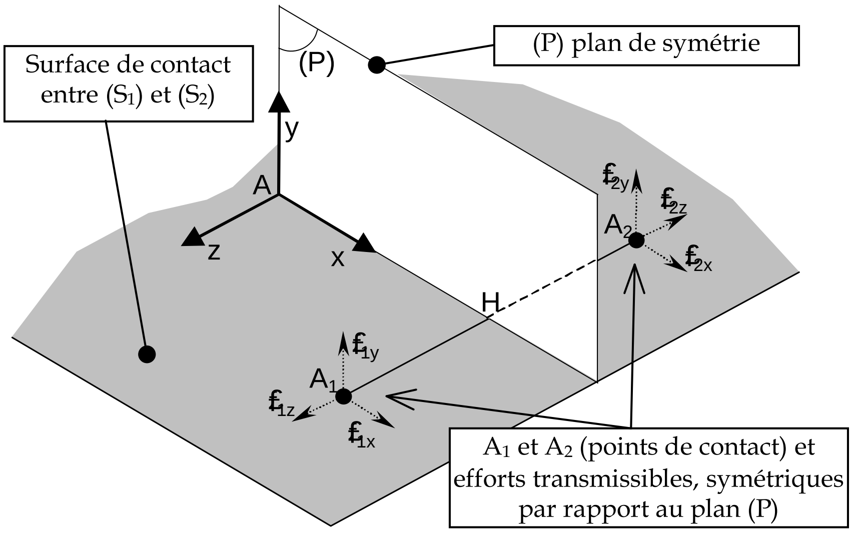
Mobilités		Action transmissible (force)	Action transmissible (couple)
$T_x = 0$	$R_x = 0$	$X \neq 0$	$L \neq 0$
$T_y = 0$	$R_y = 0$	$Y \neq 0$	$M \neq 0$
$T_z = 0$	$R_z = 1$	$Z \neq 0$	$N = 0$

7. Modélisation plan des actions mécaniques

Dans certains cas, l'étude du mécanisme dans l'espace peut être délicate. On recherche alors une possibilité de réduire l'étude à un problème plan, sous certaines hypothèses.

7.1. Hypothèses

- La surface de contact a une géométrie et des actions transmissibles qui présentent une symétrie par rapport à un plan ;
- **On choisit alors un repère local dont les axes sont confondus avec les axes de symétrie de la liaison.**



7.2. Simplification :

Lorsque les hypothèses sont réunies, l'écriture du torseur d'action mécanique transmissible par la liaison se simplifie.
Subsistent :

- La composante du moment portée par l'axe perpendiculaire au plan de symétrie ;
- Les composantes de la résultante contenues dans le plan de symétrie.

Dans notre exemple, le plan de symétrie est $(A, \vec{x}, \vec{y})$, le torseur en A associé aux efforts transmissibles par cette liaison a la forme :

Forme générale :

$$\{\mathcal{T}_{(S2/S1)}\} = \begin{Bmatrix} X_{S1}^{S2} & L_{S1}^{S2} \\ Y_{S1}^{S2} & M_{S1}^{S2} \\ Z_{S1}^{S2} & N_{S1}^{S2} \end{Bmatrix}_{A,R}$$

(6 inconnues)

Simplification :

$$\begin{Bmatrix} X_{S1}^{S2} & \cancel{L_{S1}^{S2}} \\ Y_{S1}^{S2} & \cancel{M_{S1}^{S2}} \\ \cancel{Z_{S1}^{S2}} & N_{S1}^{S2} \end{Bmatrix}$$

Forme simplifiée (symétrie) :

$$\begin{Bmatrix} X_{S1}^{S2} & 0 \\ Y_{S1}^{S2} & 0 \\ 0 & N_{S1}^{S2} \end{Bmatrix}_{A,\vec{x},\vec{y}}$$

(3 inconnues)

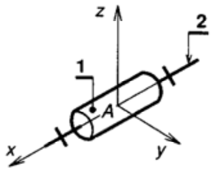
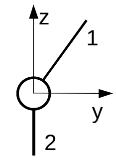
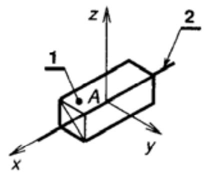
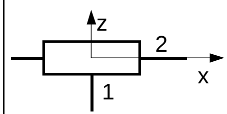
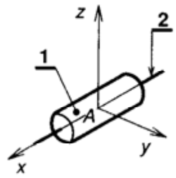
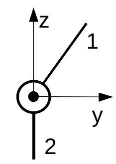
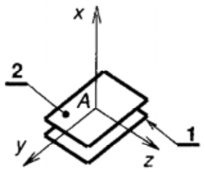
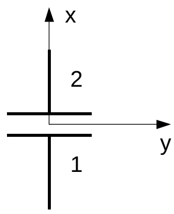
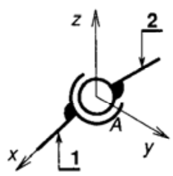
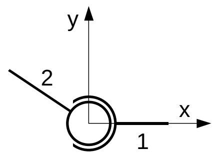
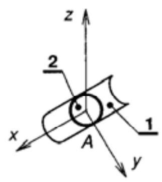
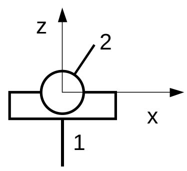
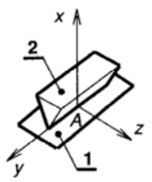
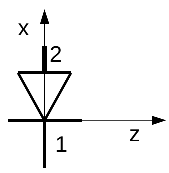
Pour une liaison parfaite particulière, parmi les composantes ci-dessus, certaines sont nulles. Mais il n'y a jamais plus de trois inconnues.

Généralisation :

Un mécanisme dont toutes les pièces utiles admettent un même plan de symétrie pour la géométrie et les efforts est un *mécanisme plan*.

8. Tableau récapitulatif : Liaisons parfaites

Tableau récapitulatif de quelques torseurs transmissibles par des liaisons parfaites :

Type de liaison et repère local associé $R=(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$	Schématisation spatiale	Mobilités	Torseur d'action mécanique transmissible	Torseur d'action mécanique Simplifié	Schématisation plan
Pivot d'axe $(A,\vec{x})$		– Rx – – – –	$\begin{Bmatrix} X_2^1 & 0 \\ Y_2^1 & M_2^1 \\ Z_2^1 & N_2^1 \end{Bmatrix}_{A,R}$	**Symétrie par rapport à $(A,\vec{y},\vec{z})$** $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_2^1 & 0 \\ Z_2^1 & 0 \end{Bmatrix}_{A,\vec{y},\vec{z}}$	
Glissière d'axe $(A,\vec{x})$		Tx – – – – –	$\begin{Bmatrix} 0 & L_2^1 \\ Y_2^1 & M_2^1 \\ Z_2^1 & N_2^1 \end{Bmatrix}_{A,R}$	**Symétrie par rapport à $(A,\vec{x},\vec{z})$** $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_2^1 \\ Z_2^1 & 0 \end{Bmatrix}_{A,\vec{x},\vec{z}}$	
Pivot glissant d'axe $(A,\vec{x})$		Tx Rx – – – –	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_2^1 & M_2^1 \\ Z_2^1 & N_2^1 \end{Bmatrix}_{A,R}$	**Symétrie par rapport à $(A,\vec{y},\vec{z})$** $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_2^1 & 0 \\ Z_2^1 & 0 \end{Bmatrix}_{A,\vec{y},\vec{z}}$	
Appui plan De normale $(A,\vec{x})$		– Rx Ty – Tz –	$\begin{Bmatrix} X_2^1 & 0 \\ 0 & M_2^1 \\ 0 & N_2^1 \end{Bmatrix}_{A,R}$	**Symétrie par rapport à $(A,\vec{x},\vec{y})$** $\begin{Bmatrix} X_2^1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_2^1 \end{Bmatrix}_{A,\vec{x},\vec{y}}$	
Sphérique de centre A		– Rx – Ry – Rz	$\begin{Bmatrix} X_2^1 & 0 \\ Y_2^1 & 0 \\ Z_2^1 & 0 \end{Bmatrix}_{A,R}$	**Symétrie par rapport à $(A,\vec{x},\vec{y})$** $\begin{Bmatrix} X_2^1 & 0 \\ Y_2^1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,\vec{x},\vec{y}}$	
Linéaire circulaire de centre A et d'axe $(A,\vec{x})$		Tx Rx – Ry – Rz	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_2^1 & 0 \\ Z_2^1 & 0 \end{Bmatrix}_{A,R}$	**Symétrie par rapport à $(A,\vec{x},\vec{z})$** $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_2^1 & 0 \end{Bmatrix}_{A,\vec{x},\vec{z}}$	
Linéaire rectiligne de normale $(A,\vec{x})$ droite de contact $(A,\vec{y})$		– Rx Ty Ry Tz –	$\begin{Bmatrix} X_2^1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_2^1 \end{Bmatrix}_{A,R}$	**Symétrie par rapport à $(A,\vec{x},\vec{z})$** $\begin{Bmatrix} X_2^1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,\vec{x},\vec{z}}$	

Statique

Objectifs :
- Enoncer le principe fondamental de la statique ;
- Indiquer plusieurs méthodes de résolution de problèmes répondants aux hypothèses de la statique ;
- Appliquer le P.F.S. à des cas particuliers simples.

Principe fondamental de la statique

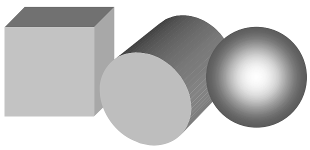
Note : Le **P**rincipe **F**ondamental de la **S**tatique sera souvent noté « P.F.S. » par la suite.

Enonce du principe

Hypothèses

On supposera que les solides sont :

- géométriquement parfaits ;
- indéformables.



La matière est supposée :

- *homogène* : tous les atomes sont identiques, le centre de gravité réel coïncide avec le centre de gravité géométrique ;
- *isotrope* : la matière a les mêmes caractéristiques mécaniques dans toutes les directions.

Enoncé général

Un solide indéformable en équilibre sous l'action de n forces extérieures (F_1, F_2, … , F_n) reste en équilibre si :

La somme vectorielle (résultante R) de toutes les forces extérieures est nulle :

$$R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = F_1 + F_2 + \ldots + F_n = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

La somme vectorielle des moments (moment résultant M_I) de toutes les forces extérieures en n'importe quel point I de l'espace est nul :

$$Ä_I = \sum_{i=1}^{n} Ä_I(F_i) = Ä_I(F_1) + Ä_I(F_2) + \ldots + Ä_I(F_n) = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

L'équation (1) est appelée *Théorème de la Résultante Statique* (T.R.S.)
L'équation (2) est appelée *Théorème du Moment résultant Statique* (T.M.S.)

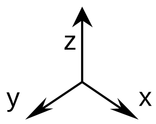
Remarque : Ce principe est également vérifié pour des solides dont le mouvement est effectué sans accélération, cas des solides en mouvement de translation rectiligne uniforme.

Statique par les torseurs

Le principe énoncé précédemment (sous forme vectorielle) peut être écrit en utilisant les torseurs .
Un solide (S), en équilibre sous l'action de n torseurs d'actions mécaniques $\{T_{1/S}\}_A$, $\{T_{2/S}\}_B$, … , $\{T_{n/S}\}_N$ reste en équilibre si la somme des n torseurs, tous écrits au même point I, est égale au torseur nul {0} :

$$\{ \tau_{1/S} \}_I + \{ \tau_{2/S} \}_I + \ldots + \{ \tau_{n/S} \}_I = \{ 0 \}$$

Equations de projection



Les équations vectorielles (1) et (2) donnent chacune trois équations scalaires de projection sur les axes x, y et z. Dans le cas le plus général, on disposera donc de six équations scalaires qui permettront de déterminer, au plus, six inconnues.

<u>Exemple :</u>

$$F_1 \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \qquad F_2 \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} \qquad (\ldots) \qquad F_n \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{pmatrix}$$

T.R.S. $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{Sur x : } X_1 + X_2 + \ldots + X_n = 0 \\ \text{Sur y : } Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = 0 \\ \text{Sur z : } Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = 0 \end{cases}$ Soit : 3 équations.

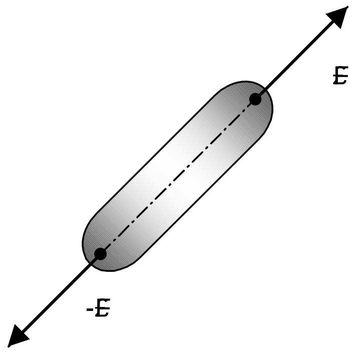
$$Ä_A(F_1) \begin{pmatrix} L_1 \\ M_1 \\ N_1 \end{pmatrix}_{A,R} \qquad Ä_A(F_2) \begin{pmatrix} L_2 \\ M_2 \\ N_2 \end{pmatrix}_{A,R} \qquad \ldots \qquad Ä_A(F_n) \begin{pmatrix} L_n \\ M_n \\ N_n \end{pmatrix}_{A,R}$$

T.M.S. $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{Sur x : } L_1 + L_2 + \ldots + L_n = 0 \\ \text{Sur y : } M_1 + M_2 + \ldots + M_n = 0 \\ \text{Sur z : } N_1 + N_2 + \ldots + N_n = 0 \end{cases}$ Soit : 3 équations.

Solide soumis à l'action deux forces	Un solide soumis à l'action de deux forces reste en équilibre si **les deux forces sont égales** en norme **et opposées** en sens.

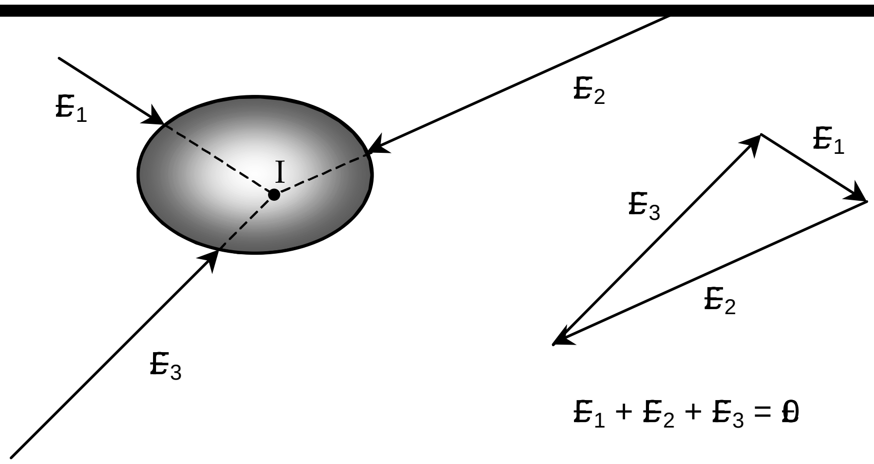
Par conséquent, les deux forces ont :

- ☞ Même ligne d'action
- ☞ Même intensité
- ☞ Sens opposé



Solide soumis à l'action de trois forces concourantes

Un solide soumis à l'action de trois forces (non parallèles) reste en équilibre si **les trois forces sont concourantes au même point** et si **la somme vectorielle des trois forces est nulle**.



$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$$

Modélisation d'une action mécanique

Phénomène d'adhérence et de frottement

Généralités

La technologie peut vouloir :

☞ **REDUIRE** **le frottement** et donc permettre un meilleur rendement dans la transmission des efforts de la puissance.

Facteurs intervenants :
- Etat de surface (Rugosité)
- Matière (Coussinet : bronze / acier)
- Lubrification (Graissage périodique, barbotage)
- Roulement (Dents de pignons1types de roulements)
- Frottement fluide (Film fluide sous pression)

☞ **REALISER** la liaison encastrement entre 2 solides : Collage. (Adhérence à son extrême limite : pas de mouvement relatif autorisé).

☞ **FREINER** le mouvement de glissement.

Etat de surface ....Crampons des pneumatiques
Matière...Pneu caoutchouc / asphalte de la route
Matériaux de friction ....Freins, embrayages

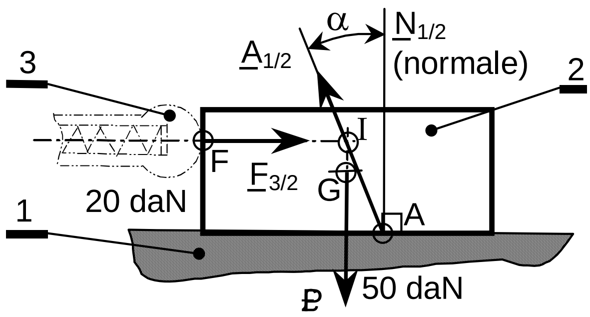
Définitions

Si les 2 surfaces en contact **tendent à glisser** l'une par rapport à l'autre (sans déplacement) ➔ **ADHERENCE**	Si les 2 surfaces en contact **glissent** l'une par rapport à l'autre ➔ **FROTTEMENT**

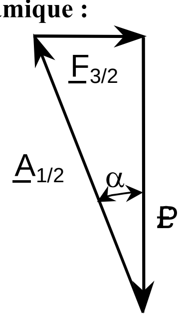
Loi de COULOMB

On exerce sur un parallélépipède **2** de poids P en appui horizontal sur **1** une force F située dans le plan de symétrie géométrique de **2**.

$F_{3/2} \neq 0$, **2** est en **équilibre**.



Dynamique :

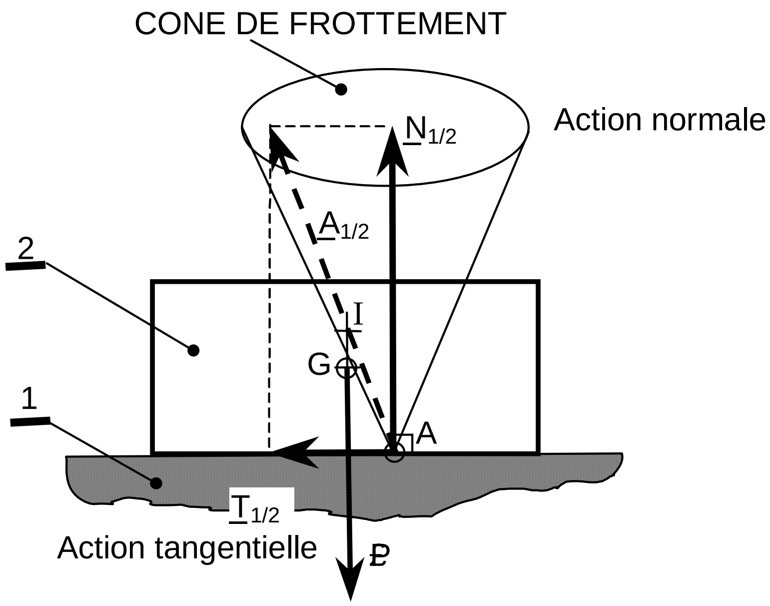


Justification : Le solide est en équilibre sous l'action de **3 forces concourantes** en un même point **I.**

$$P + F_{3/2} + A_{1/2} = 0$$

$A_{1/2}$ (résultante) fait un angle α par rapport à la normale $N_{1/2}$.
Nota : Si $F_{3/2}$ augmente, α augmente.

$$\boxed{\tan \alpha = \frac{\| F_{3/2} \|}{\| P \|}}$$



Condition d'équilibre de **2** : $\vec{A}_{1/2} = \vec{N}_{1/2} + \vec{T}_{1/2}$

$$\boxed{\tan \varphi = \mu \qquad \mu = \frac{\|\vec{T}_{1/2}\|}{\|\vec{N}_{1/2}\|}}$$

Si : $A_{1/2}$ est à l'intérieur du cône $\alpha < \varphi$
➔ Le solide **2** est en ***équilibre***.

Si : $A_{1/2}$ est sur le cône $\alpha = \varphi$
➔Le solide **2** est en ***équilibre strict***.

Si : $A_{1/2}$ est à l'extérieur du cône $\alpha > \varphi$ (cas impossible)
➔ Equilibre impossible, $\vec{A}_{1/2} \neq \vec{N}_{1/2} + \vec{T}_{1/2}$ ➔ glissement.

Valeurs de coefficients de frottement

Valeurs indicatives de μ_s et μ	Adhérence $\mu_s = f_s = \tan \varphi_s$		Frottement $\mu = f = \tan \varphi$	
Nature des matériaux en contact	A sec	Lubrifié	A sec	Lubrifié
Acier sur acier	0,18	0,12	0,15	0,09
Acier sur fonte	0,19	0,1	0,16	0,08 à 0,04
Acier sur bronze	0,11	0,1	0,1	0,09
Téflon sur acier	0,04		0,04	
Fonte sur bronze		0,1	0,2	0,08 à 0,04
Nylon sur acier			0,35	0,12
Bois sur bois	0,65	0,2	0,4 à 0,2	0,16 à 0,04
Métaux sur bois	0,6 à 0,5	0,1	0,5 à 0,2	0,08 à 0,02
Métal sur glace			0,02	
Pneu voiture sur route	0,8		0,6	0,3 à 0,1 sur sol mouillé

V. CINEMATIQUE C1

Objectif :
Décrire le mouvement d'un solide ou la trajectoire d'un point dans l'espace.

Position, trajectoire et mouvement

Introduction

Définition :

La cinématique est la partie de la mécanique qui permet d'étudier et de décrire les mouvements des corps, d'un point de vue purement mathématique, indépendamment des causes qui les produisent.

But de la cinématique :

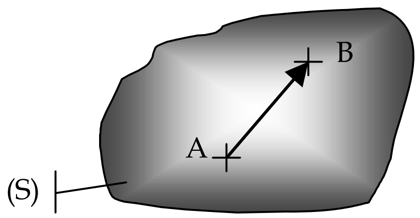
L'analyse des grandeurs cinématiques (position, vitesse et accélération) permet de déterminer la géométrie et les dimensions de pièces, de composants. Dans le cas d'un mécanisme qui n'est pas en situation d'équilibre, la cinématique, combinée à l'étude des actions mécaniques, permet l'application du principe fondamental de la dynamique (chapitre ultérieur).

Exemples :

- Usinage : trajectoire d'un outil, vitesse d'avance ;
- Dimensionnement d'une pompe : cylindrée, débit ;
- Astrophysique : trajectoires et orbites des satellites …

Hypothèse

On considère que les solides sont indéformables.

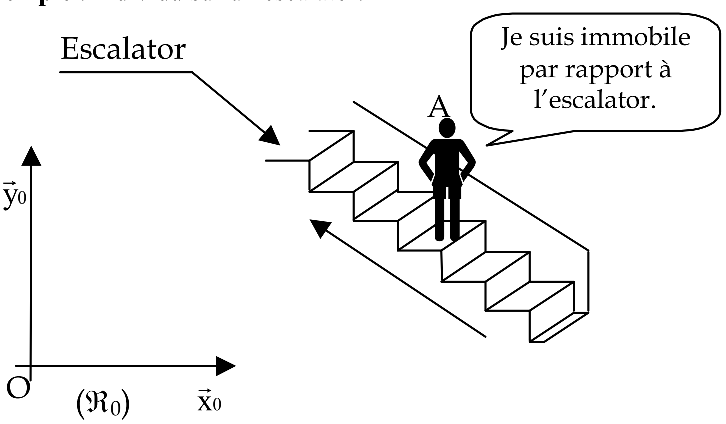


Une pièce mécanique (S) peut être considérée comme un solide indéformable si quels que soient les points A et B appartenant à (S) la distance AB reste constante au cours du temps.

$\forall$A et B $\in$ (S), $\forall$ t, $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$=constante

Référentiel

Exemple : Individu sur un escalator.



Le repère $\Re_0$ est lié au sol.

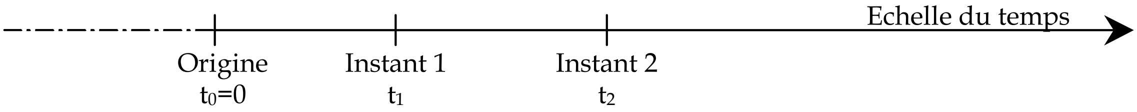
L'individu A est *mobile* dans le repère $\Re_0$, mais *immobile* par rapport à l'escalator.

L'étude de tout mouvement implique deux solides en présence :

- Le solide (S) dont on étudie le mouvement ;
- Le solide (S_0) par rapport auquel on définit le mouvement.

(S_0) est appelé ***solide de référence***, auquel on associe le ***repère de référence***. Le mouvement de (S) par rapport à (S_0) est noté Mvt S/S_0.

Quelle que soit l'étude cinématique, on a toujours besoin de se situer dans le temps. On appelle ***instant t*** ou ***date t*** le temps écoulé depuis une origine des temps $t_0=0$, choisie arbitrairement. L'unité de mesure du temps (système ISO) est la seconde, notée ***s***.



$\Delta t = t_2-t_1$ est appelée durée entre les deux instants t_1 et t_2.

Vecteur position

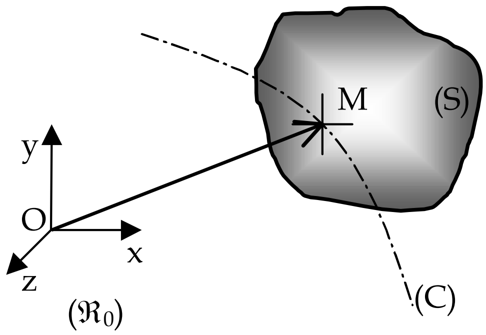
Il nous faut être en mesure, à tout instant, de définir la position de n'importe quel point du solide dans l'espace. A cette fin, on utilise un ***vecteur position***.

Soit (S) un solide en mouvement par rapport à un repère $\Re_0(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Soit M un point appartenant au solide (S) de coordonnées x(t),y(t),z(t) à l'instant t.

Au cours de ce mouvement, le point M décrit dans le repère $\Re_0$ une courbe (C) appelée ***trajectoire*** du point M(t) dans le repère $\Re_0$.

Le vecteur position du point M(t) du solide (S), dans le repère $\Re_0$, à l'instant t, est le vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$ où O est l'origine du repère $\Re_0$.



$\overrightarrow{OM}(t)$ =vecteur position.

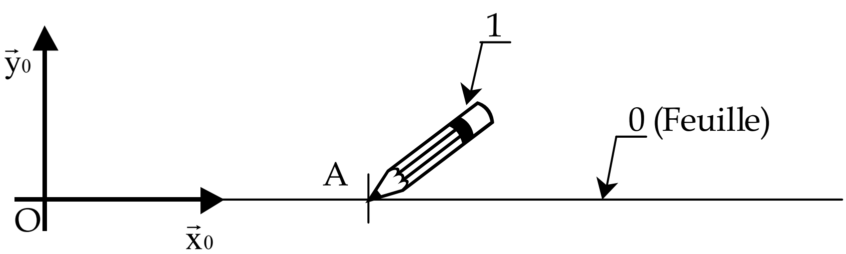
$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = x(t).\ \vec{x} + y(t).\ \vec{y} + z(t).\ \vec{z}}$$

Trajectoire

On appelle ***trajectoire du point (M)*** d'un solide (S) l'ensemble des positions occupées successivement par ce point, au cours du temps, au cours de son déplacement par rapport à un référentiel donné.

Notation : $T_{M\in S/R}$ = trajectoire du point M appartenant à S, par rapport au repère R.

Exemple 1 :

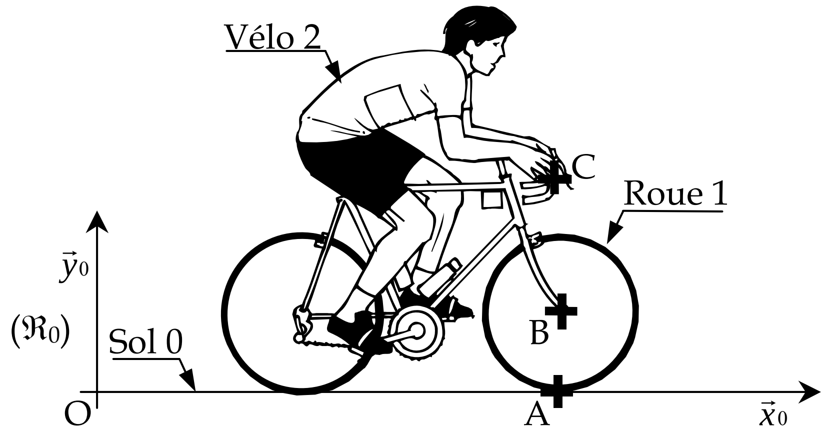


Déterminer la trajectoire du point A appartenant à 1 par rapport au repère 0.

✍ La trajectoire $T_{A\in 1/0}$ correspond au trait tracé par le stylo.

Exemple 2 :

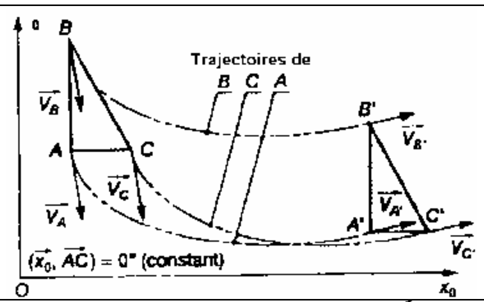
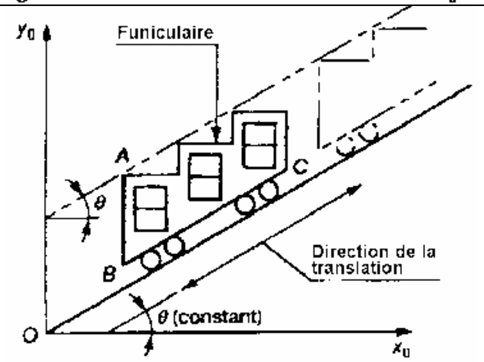
Soit une bicyclette en mouvement par rapport à un repère $\Re_0$ considéré comme un repère fixe.
Soit A le point de contact entre la roue 1 et le sol 0.
Soit B le centre de l'articulation entre la roue 1 et le cadre 2.
Soit C un point appartenant à une poignée de frein.

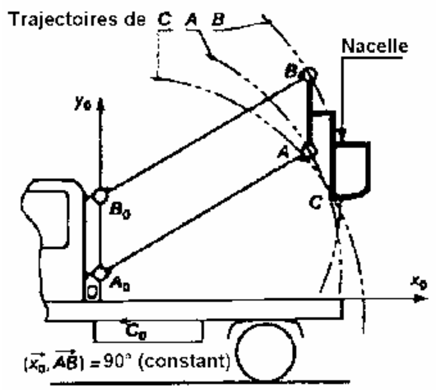
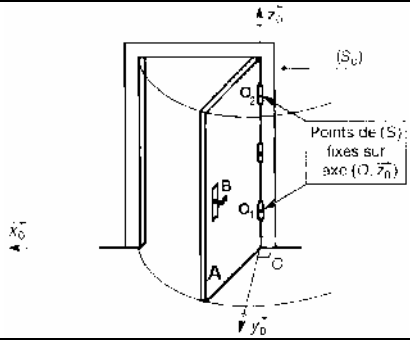
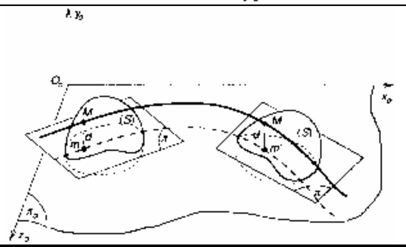


Déterminer et tracer les trajectoires suivantes :

- ➲ $T_{C\in 2/0}$: *segment de droite // (0,x₀).*
- ➲ $T_{B\in 2/0}$: *segment de droite // (0, x₀).*
- ➲ $T_{A\in 2/0}$: *segment de droite (A, x₀).*
- ➲ $T_{B\in 1/2}$: *point.*
- ➲ $T_{A\in 1/2}$: *Cercle de centre A et de rayon AB.*
- ➲ $T_{B\in 1/0}$: *segment de droite // (0, x₀).*
- ➲ $T_{A\in 1/0}$: *Cycloïde.*

Mouvements particuliers de solides

Famille de mouvement	**Mouvement particulier**	**Exemple**	**Définition**
Translation	Translation quelconque		Un solide est en translation dans un repère R si n'importe quel bipoint (AB) du solide reste parallèle à sa position initiale au cours du mouvement.
	Translation rectiligne		Tous les points du solide se déplacent suivant des lignes parallèles entre elles.

	Translation circulaire		Tous les points du solide se déplacent suivant des courbes géométriques identiques ou superposables.
Rotation	Rotation		Tous les points du solide décrivent des cercles concentriques centrés sur l'axe du mouvement.
Mouvement plan	Mouvement plan		Tous les points du solide se déplacent dans des plans parallèles entre eux.

CINEMATIQUE C2

Objectif :
Définir, décrire et calculer la vitesse ou l'accélération d'un point d'un solide.

Vitesse et accélération

Vitesse

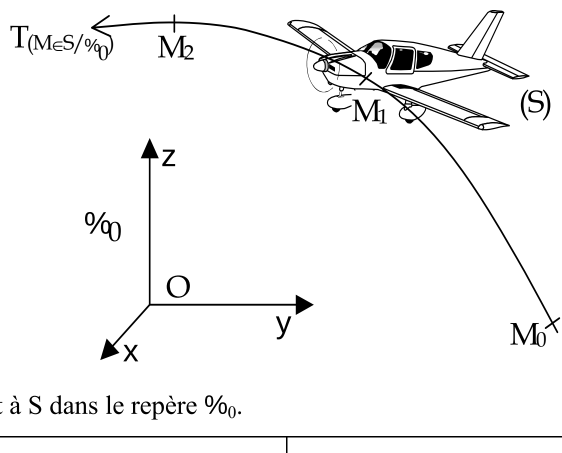
Notion de vitesse

Soit (S) un solide en mouvement dans un repère $\%_0$.
Soit M un point appartenant au solide (S), de coordonnées x(t), y(t) et z(t) à l'instant t.

Soit T(M∈S/$\%_0$) la trajectoire de M.

Sur cette trajectoire, choisissons par convention :

- une origine M_0 ;
- un sens positif ;
- une unité de longueur.



On relève, aux instants t_0, t_1, t_2, les positions du point M appartenant à S dans le repère $\%_0$.

Instants	t_0	t_1	t_2
Position sur T(M∈S/$\%_0$)	M_0	M_1	M_2

Abscisse curviligne s = f(t)	$s_0 = 0$	$s_1 = M_0M_1$	$s_2 = M_0M_2$

$\overline{S}$ = arc M_0M = valeur algébrique, à l'instant t, de l'arc orienté M_0M

Vitesse algébrique moyenne

Entre t_1 et t_2 : $\boxed{V(t_1 \rightarrow t_2)_{moy} = \dfrac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}}$

Vitesse algébrique instantanée

Si t_2 est très proche de t_1, alors Δt devient infiniment petit. $\boxed{v(t) = \dfrac{ds}{dt} = s'(t) \ \textit{(dérivée de l'abscisse curviligne)}}$

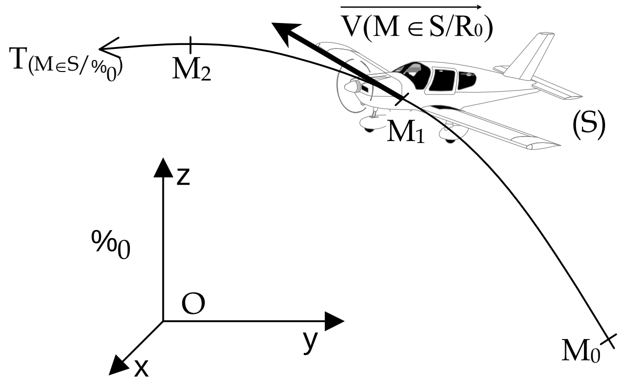
Vecteur vitesse instantanée

Le vecteur vitesse du point M dans son mouvement par rapport au repère fixe $\%_0$, est égal à la dérivée vectorielle (par rapport au temps) du vecteur position, dans le repère $\%_0$.

$$\overrightarrow{V(M \in S/R_0)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} \qquad \boxed{\overrightarrow{V(M \in S/R_0)} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\Re_0}}$$

Le vecteur $\overrightarrow{V(M \in S/R_0)}$ est tel que :

- son origine est confondue avec la position de M à l'instant t ;
- il est toujours tangent en M à la trajectoire $T(M \in S/\%_0)$;
- il est orienté dans le sens du mouvement ;
- sa norme est $\left\|\overrightarrow{V(M \in S/R_0)}\right\| = |v| = \left|\dfrac{ds}{dt}\right|$;
- unité : mètre par seconde, ou m/s.



Autre expression possible :

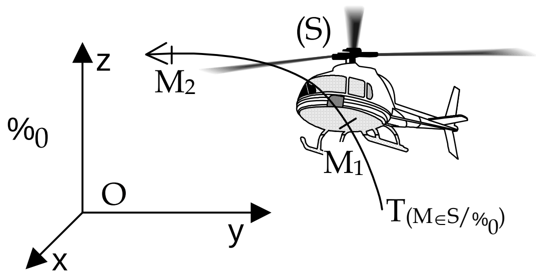
$$\text{Si } OM \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}_{\%_0} \qquad \text{Alors } \overrightarrow{V(M \in S/R_0)} \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \\ \dfrac{dz}{dt} \end{pmatrix}_{\%_0}$$

Accélération

Accélération tangentielle moyenne

Si le point M se situe en M_1 à l'instant t_1 et qu'il possède une vitesse instantanée v_1 ; s'il passe à l'instant t_2 en M_2 à la vitesse v_2, son accélération tangentielle moyenne entre t_1 et t_2 vaut :

$$\boxed{a_t(t)_{moy} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$



L'accélération peut aussi être notée $\Gamma(M \in S/\%_0)$ ou γ $(M \in S/\%_0)$.

Accélération tangentielle instantanée

A l'instant t quelconque, elle correspond à la limite du rapport $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ lorsque $\Delta t \rightarrow 0$.

$$a_t(t) = \frac{dv}{dt} \ ; \quad \text{or } v(t) = \frac{ds}{dt} \ ; \quad \text{d'où} \quad \boxed{a_t(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = s''(t)}$$

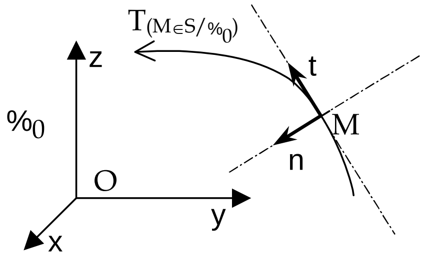
Vecteur accélération

$$a(M/\%_0) = \left(\frac{d\overrightarrow{V(M/\Re_0)}}{dt}\right)_{\Re_0} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_{\Re_0}$$

<u>Composantes tangentielles et normales de l'accélération :</u>

Soient :

- n un vecteur unitaire normal en M à la trajectoire $T(M\in S/\%_0)$, orienté vers l'intérieur de la courbure ;
- t un vecteur unitaire tangent en M à $T(M\in S/\%_0)$, orienté comme la trajectoire.



Dans cette base (n,t), l'accélération peut s'écrire :

$$\boxed{a(M/\%_0) = a_n \times n + a_t \times t}$$

avec :

- a_n = accélération normale = $\dfrac{v^2}{R}$ (R représente le rayon de courbure)
- a_t = accélération tangentielle = $\dfrac{dv}{dt}$

<u>Autre expression possible :</u>

Si $\overrightarrow{V(M \in S/R_0)} \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \\ \dfrac{dz}{dt} \end{pmatrix}_{\%_0}$ Alors $\overrightarrow{a(M \in S/R_0)} \begin{pmatrix} \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} \end{pmatrix}_{\%_0}$

Cas du mouvement de translation rectiligne uniforme

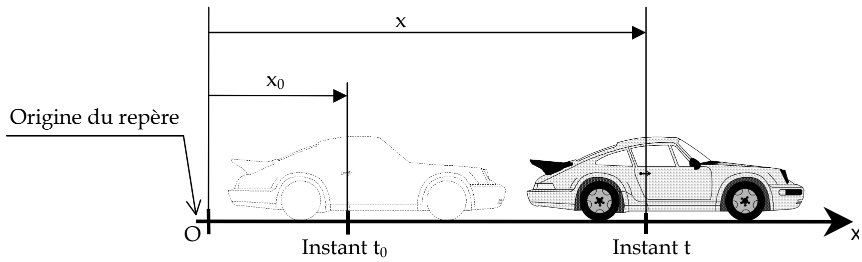
Définition

C'est le mouvement le plus simple, sans accélération (a=0) et avec une vitesse constante au cours du temps.
Il est noté M.T.R.U.

Equations de mouvement

Soient :

t_0 : instant initial, $t_0 = 0$;
x_0 : le déplacement initial, à $t=t_0$;
v_0 : la vitesse initiale ;
x : le déplacement à l'instant t.

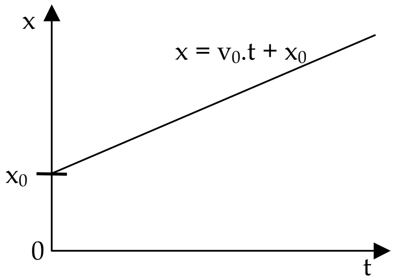


Equations horaires

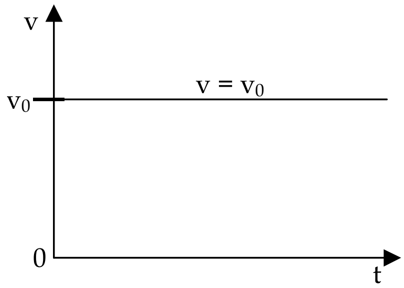
$$
\boxed{\begin{array}{l} a = 0 \\ v = v_0 = \text{constante} \\ x = v_0.(t-t_0) + x_0 \end{array}}
$$

x_0 et v_0 sont les ***conditions initiales*** du mouvement.

Graphe de position



Graphe de vitesse



Cas du mouvement de translation rectiligne uniformément accéléré

Définition

Il sert de modèle à de nombreuses études simplifiées. Pour ces mouvements, accélérés (a>0) ou décélérés (a<0), l'accélération reste constante au cours du temps.

Il est noté M.T.R.U.V.

Equations du mouvement

Soient :

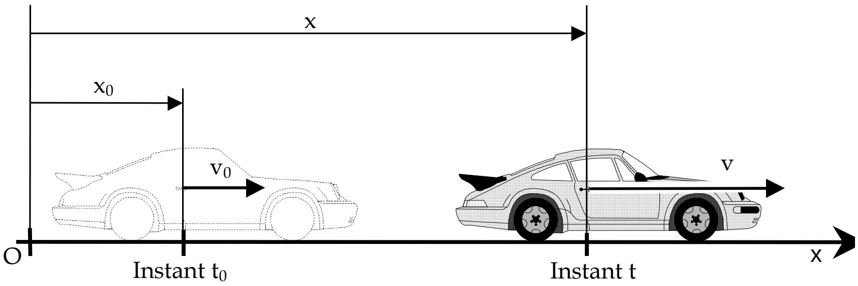
t_0 : instant initial, $t_0 = 0$;

x_0 : le déplacement initial, à $t=t_0$;

a_0 : l'accélération initiale ;

v_0 : la vitesse initiale ;

x : le déplacement à l'instant t.

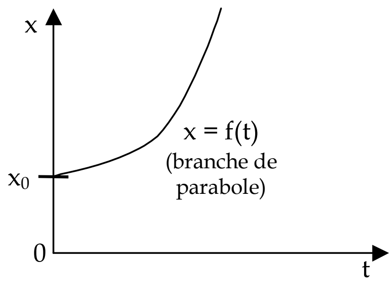


Equations horaires

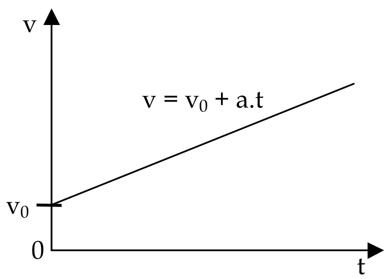
$$
\boxed{\begin{array}{c} a = a_0 = \text{constante} \\ v = a.(t-t_0) + v_0 \\ x = \dfrac{1}{2}.a.(t-t_0)^2 + v_0.(t-t_0) + x_0 \end{array}}
$$

x_0, v_0 et a_0 sont les ***conditions initiales*** du mouvement.

Graphe de position



Graphe de vitesse

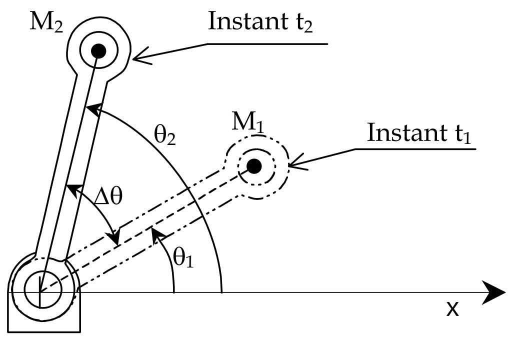


Mouvement de rotation : généralités

Rotation d'un solide

La rotation d'un solide est définie par son mouvement angulaire (tous les points de ce solide ont même vitesse angulaire).

$$
\boxed{\theta_2 = \theta_1 + \Delta\theta}
$$



Vitesse angulaire, ou vitesse de rotation ω

Vitesse angulaire moyenne :

$$
\boxed{\omega_{moy} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}}
$$

Vitesse angulaire instantanée : $$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \theta' = \dot{\theta}$$

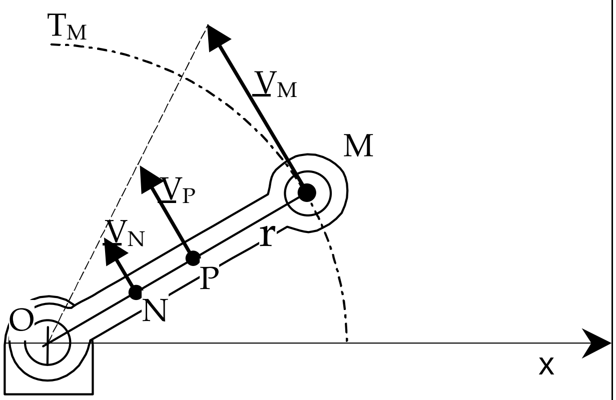
Remarque 1 :
1 tour = 2π radian = 360°
Remarque 2 :

Si N est la vitesse de rotation en tour/min, alors : $\omega = \frac{\pi N}{30}$

Accélération angulaire α

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \omega' = \dot{\omega} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \theta'' = \ddot{\theta}$$

Vitesse d'un point



$$V_M = \omega.OM = \omega.r$$

Remarque : puisque ω a même valeur pour tous les points du solide, la vitesse linéaire $V(M \in S/R_0)$ varie linéairement avec la distance r à l'axe de rotation.

Accélération

$a_M = a_n + a_t$

$$a_t = \alpha.r = \alpha.OM$$
$$a_n = \omega^2.r = \frac{V_M^2}{r} \; = $$

Cas du mouvement de rotation uniforme

Définition

L'accélération angulaire α est nulle. Ce mouvement est noté M.R.U.

Equations horaires de mouvement

Les équations horaires de mouvement sont :

$\alpha = \theta'' = 0$
$\omega = \omega_0$ = constante
$\theta = \omega.(t-t_0) + \theta_0$

ω_0 et θ_0 sont les ***conditions initiales*** du mouvement.

Mouvement de rotation uniformément varié

Définition

L'accélération angulaire α est constante. Ce mouvement est noté M.R.U.V.

Equations horaires de mouvement

Les équations horaires de mouvement sont :

α =constante
$\omega = \alpha.(t-t_0) + \omega_0$
$\theta = \frac{1}{2}.\alpha.(t-t_0)^2 + \omega_0.(t-t_0) + \theta_0$

ω_0 et θ_0 sont les ***conditions initiales*** du mouvement.

Remarque :

- Si $\alpha > 0$, il y a accélération du mouvement.
- Si $\alpha < 0$, il y a décélération du mouvement (ou freinage).

Objectif :
Déterminer graphiquement un vecteur vitesse, dans le cas d'un mouvement plan.

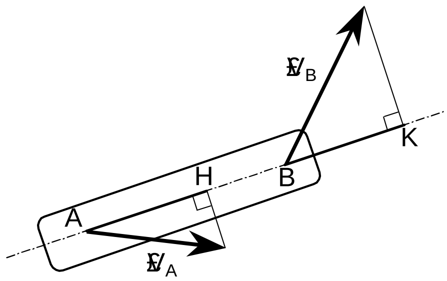
CINEMATIQUE

Vecteur vitesse dans un mouvement plan

Equiprojectivité

Enoncé

Soient deux points A et B appartenant à un même solide et $\vec{V}_A$ et $\vec{V}_B$ les vecteurs vitesses respectifs :



La projection orthogonale de $\vec{V}_B$ sur $\vec{AB}$ est égale à la projection orthogonale de $\vec{V}_A$ sur $\vec{AB}$.

$$\boxed{\vec{V}_A \cdot \vec{AB} = \vec{V}_B \cdot \vec{AB}}$$

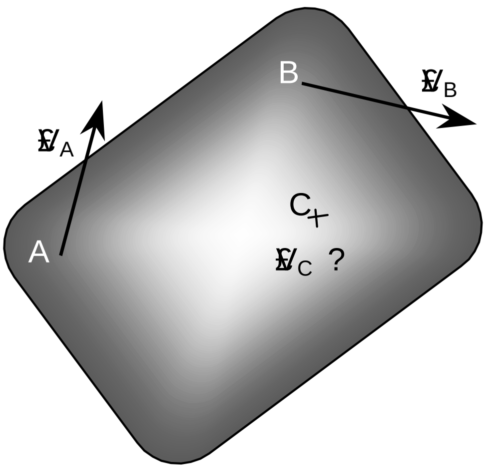
concrètement : $\vec{AH} = \vec{BK}$

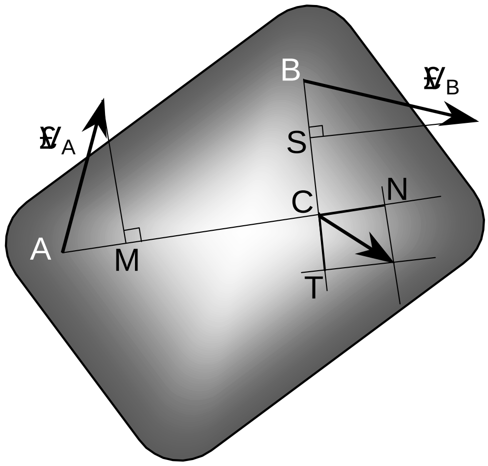
Détermination d'une vitesse par double équiprojectivité

Soit :

- $\vec{V}_A$ et $\vec{V}_B$ deux vitesses connues ;
- $\vec{V}_C$ une vitesse de direction et d'intensité inconnue.

La détermination de $\vec{V}_C$ est possible par double équiprojectivité à partir des deux vitesses $\vec{V}_A$ et $\vec{V}_B$ connues.





$\vec{AM} = \vec{CN}$
$\vec{BS} = \vec{CT}$

Remarque : si C était aligné avec A et B, il aurait fallu déterminer la vitesse $\vec{V}_D$ d'un point D non aligné avec A et B.

C3_Vitesse dans un mvt plan.doc 06/09/2006

Centre instantané de rotation

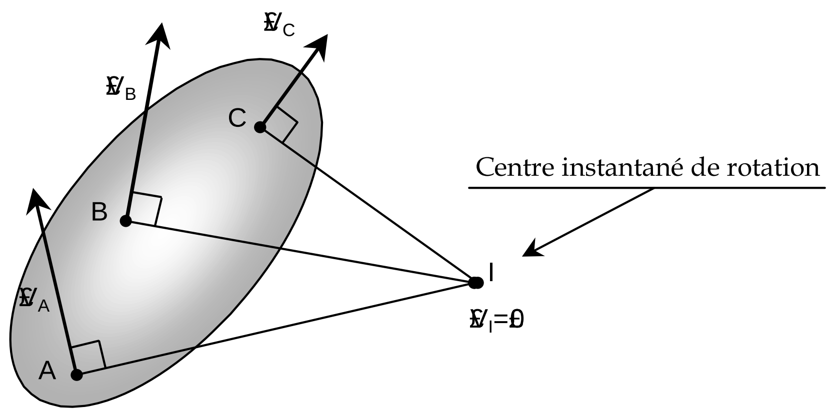
Définition

Pour tout solide en mouvement plan, il existe un point I et un seul, ayant une vitesse nulle ($\vec{V}_I = \vec{0}$) à l'instant considéré et appelé *centre instantané de rotation* ou *CIR*.

Le CIR a les propriétés d'un centre de rotation à l'instant (t) considéré. A l'instant suivant (t'=t+Δt), le CIR a changé de position géométrique.

Détermination et construction du CIR

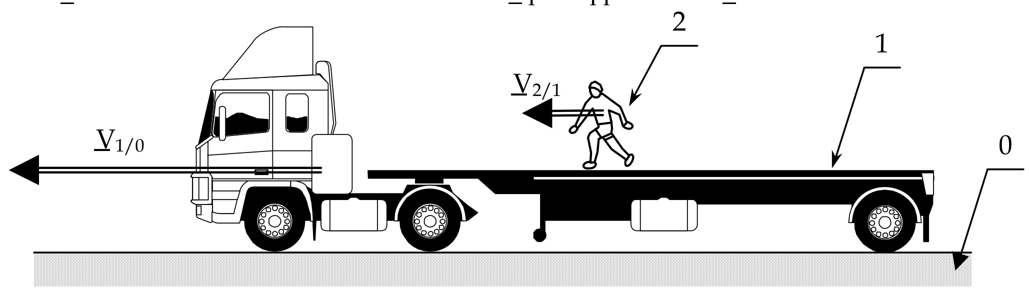
En tant que centre de rotation, le CIR est situé à l'intersection des perpendiculaires aux vecteurs vitesses du solide.



Composition des vecteurs vitesse

Vitesses linéaires

Soit un cascadeur 2 marchant sur un camion en mouvement 1 par rapport au sol 0.



La vitesse relative du cascadeur par rapport au camion est $V_{2/1}$.
La vitesse absolue du cascadeur par rapport au sol est $V_{2/0}$, avec $V_{2/0} = V_{2/1} + V_{1/0}$
Cette relation est généralisable à n'importe quels solides S_1 et S_2, par rapport à un référentiel S_0 :

$$\boxed{V_{M\in 2/0} = V_{M\in 2/1} + V_{M\in 1/0}}$$

Remarque : Cette relation reste valable même si les vecteurs vitesses ne sont pas colinéaires.

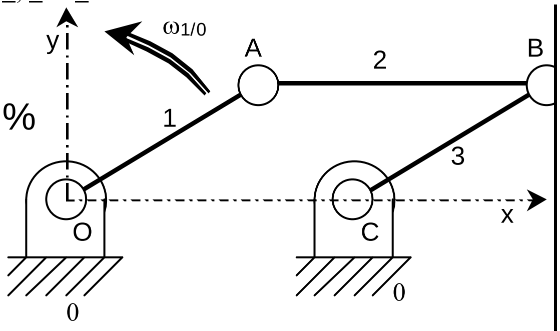
Vitesses angulaires

La relation précédente peut être étendue aux vitesses angulaires :

$$\boxed{\Omega_{2/0} = \Omega_{2/1} + \Omega_{1/0}}$$

1) Système de bielles

1, 2 et 3 sont des bielles.



R.cos(ω_{1/0}.t)_OA=R.sin(ω_{1/0}.t)0

Données :

1 est articulé en O (avec le bâti 0) et A (avec la bielle 2) ;
3 est articulé en C (avec le bâti 0) et B (avec la bielle 2) ;
OA = CB = R AB = d
$\omega_{1/0} = \omega_{2/0}$ = vitesse de rotation de 1 et 2 = constante.

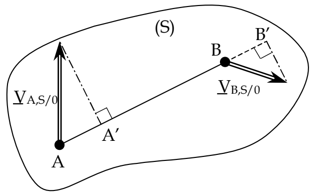
a) Définir les types de mouvements suivants : Mouvement de 1/0, de 2/0, de 3/0.
b) Définir les trajectoires des points A et B dans le repère $\%_0$.
c) Déterminer littéralement les coordonnées du vecteur vitesse du point A : $V(A \in 1/0)$.
d) Déterminer littéralement la norme du vecteur vitesse du point A : $\| V(A \in 1/0) \|$.
e) Si R = 60mm et $\omega_{1/0}$ = 150 tr/min, calculer $\| V(A \in 1/0) \|$.
f) Que peut-on dire de $V(B \in 3/0)$?
g) Déterminer les composantes normale et tangentielle de l'accélération du point A.

2) Abscisse curviligne

Le point M d'un solide S a un mouvement plan dont l'abscisse curviligne est : $s(t) = t^2 + 3.t - 10$.
Déterminer à l'instant t = 5s. la vitesse algébrique et l'accélération tangentielle du point M.

Cinématique

Equiprojectivité des vecteurs vitesse :



AA' = BB'

Composition des vecteurs vitesse :
$V_{M,3/1} = V_{M,3/2} + V_{M,2/1}$

Solide en translation		Solide en rotation	
Formule	***Formule simplifiée***	***Formule***	***Formule simplifiée***
Vitesse instantanée : $\overrightarrow{V_{M,0/1}} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$	$v = \frac{dx}{dt}$	Vitesse tangentielle $V_{M,1/0} = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \times \overrightarrow{OM}$	$V_M = \omega.R$

Accélération : $a_M = \dfrac{d\overrightarrow{V_{M,0/1}}}{dt}$	-	Accélération normale	$a_n = \alpha \cdot R$
-	-	Accélération tangentielle	$a_t = \omega^2 \cdot R$
x = abscisse du point M		α = angle parcouru ω = vitesse de rotation R = rayon de la trajectoire	

Notion d'action mécanique

Moment au point A :

produit vectoriel :

$$\ddot{A}_B(F_{ext}) = \ddot{A}_A(F_{ext}) + BA \times F_{(ext)}$$

bras de levier :

$||\ddot{A}_A(F_{ext})|| = d. || F_{(ext)} ||$

d = distance entre le point condidéré et la droite d'application de l'effort.

Torseur : $\{\tau_{(ext \rightarrow 1)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R}_{(ext \rightarrow 1)} \\ \overrightarrow{M}_{A(ext \rightarrow 1)} \end{Bmatrix}$

Action à distance : poids.

$|| P|| = m.g$

Statique

Principe Fondamental de la statique (P.F.S.) : solide en *équilibre*.

Théorème de la résultante en statique (T.R.S.) : $\Sigma F_{ext} = 0$

Théorème des moments en statique (T.M.S.) : $\Sigma \ddot{A}_A(F_{ext}) = 0$

*Solide soumis à **deux forces*** : les efforts sont égaux (en norme), opposés, portés par la même droite support.

*Solide soumis à **trois efforts concourants*** : les droites supports des trois efforts se croisent en un même point.

Dynamique

Translation	Rotation
$\Sigma F_{ext} = m \cdot a_G$	$\Sigma \ddot{A}_A(F_{ext}) = I(O,z) \cdot \dfrac{d\omega}{dt}$
a_G = accélération du centre de gravité	$\dfrac{d\omega}{dt}$ = accélération angulaire I(O,z) = moment quadratique par rapport à l'axe z

Energétique

Travail d'une force F : $\Delta W = F \cdot \Delta l$ ou $\Delta W = F \cdot \Delta l \cdot \cos(F, \Delta l)$ (Δl = dépl. du pt d'application)

Travail d'un couple C constant : $W = C \cdot \theta$ (θ = dépl. du couple C)

Energie potentielle de pesanteur $Ep = m.g.z$

Energie cinétique : $Ek = T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2$

Puissance développée par une force F : $P = F \cdot V$ ou $P = F \cdot V \cdot \cos(F, V)$

Puissance développée par un couple C : $P = C \cdot \omega$

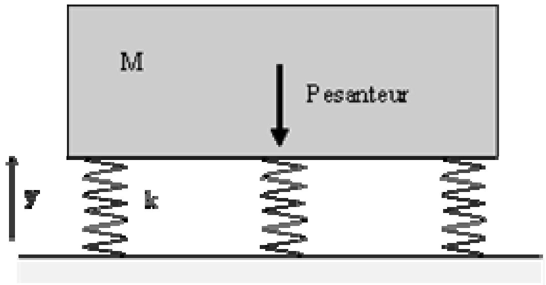
Théorème de conservation d'énergie : $E_{k1}+E_{p1} = E_{k2}+E_{p2}$ = constante

VI. MÉCANIQUE VIBRATOIRE D'UN SYSTÈME A UN DEGRÉ DE LIBERTÉ

1- VIBRATIONS LIBRES NON AMORTIES D'UN SYSTÈME A UN DEGRÉ DE LIBERTÉ

11- Équation du mouvement

Considérons un ensemble socle et machine de masse M, reposant sur un ressort élastique linéaire de raideur k, la surface du sol étant supposée infiniment rigide.



Appelons *y* le déplacement absolu du solide M. L'application du principe fondamental de la dynamique au système permet d'écrire

$M.g - k.y = M.y''$ soit:

$$\boxed{M.y'' + k.y = M.g}$$

Cette relation peut également être établie à partir du principe de conservation de l'énergie.

12- Résolution de l'équation de mouvement

Posons: $y = Y + \dfrac{M.g}{k}$, le terme $\dfrac{M.g}{k}$ représentant le déplacement "statique" du solide M

Par conséquent: $y'' = Y''$

D'où: $M.Y'' - M.g + k.Y + M.g = 0$ Soit: $M.Y'' + k.Y = 0$ ou:

$$\boxed{Y'' + \omega_0^2.Y = 0}$$

avec $\omega_0^2 = \dfrac{k}{M}$

La solution générale de l'équation ci dessus est donnée par:

$Y = A.\cos\omega_0 t + B.\sin\omega_0 t$ ou $Y = C.\cos(\omega_0 t + \varphi)$

avec $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ et $tg\,\varphi = \frac{B}{A}$

d'où la solution de l'équation peut s'écrire:

$$\boxed{y = \frac{M.g}{k} + C.\cos(\omega_0.t + \varphi)}$$

Remarques:

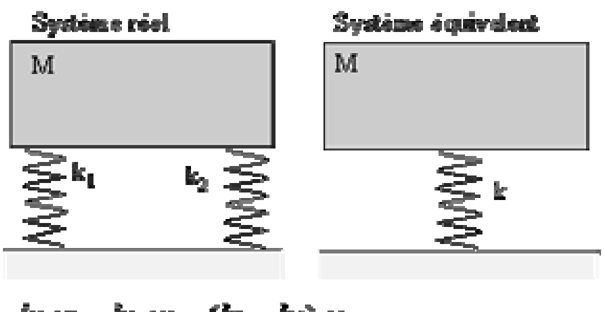
- ω_0 est appelée la pulsation propre du système *(rad/s)*
- $T = \frac{2.\pi}{\omega_0}$ est appelée la période propre du système *(s)*
- $f_0 = \frac{\omega_0}{2.\pi}$ est appelée la fréquence propre du système *(Hz)*
- $Y = y - \frac{M.g}{k}$ est appelée le déplacement relatif de M (déplacement par rapport à la position d'équilibre statique)
- C est l'amplitude du déplacement relatif

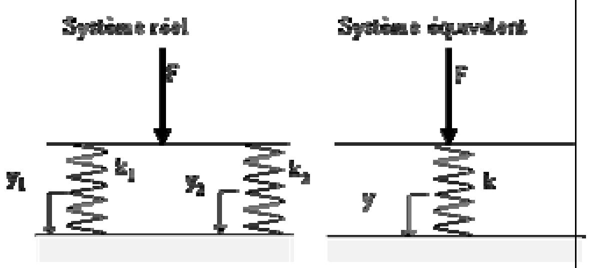
Lorsqu'on étudie les vibrations libres d'un système, il est surtout important de connaître la pulsation propre ω_0 du phénomène. Cette valeur ne faisant pas intervenir le déplacement statique, tout revient donc à dire que pour obtenir l'équation différentielle $M.\ddot{Y} + kY = 0$ on néglige l'action de la pesanteur, Y représentant toujours le déplacement relatif par rapport à la position d'équilibre statique

3- Ressorts en parallèle ou en série

Souvent, pour éviter les problèmes de résonance, on déplace les fréquences propres d'un système et on est appelé à associer des ressorts de raideurs différentes.

131- Ressorts en parallèle





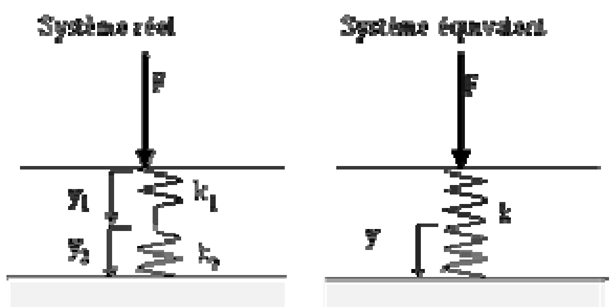
Pour le système réel, on a: $F = k_1.y_1 + k_2.y_2 = (k_1 + k_2).y$

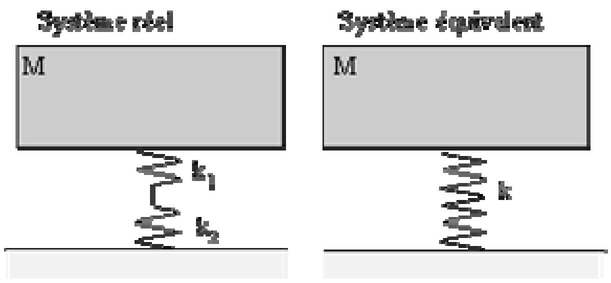
Pour le système équivalent: $F = k.y$

On en déduit:

$$\boxed{k = k_1 + k_2}$$

132- Ressorts en série





Pour le système réel, on a: $F = k_1 y_1 = k_2 y_2$

Pour le système équivalent: $F = k.y$

Or: $y = y_1 + y_2$ soit: $\frac{F}{k} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}$

On en déduit:

$$\boxed{\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$

14- Calculs de k

141- Méthode statique : utilisation de la loi de HOOKE

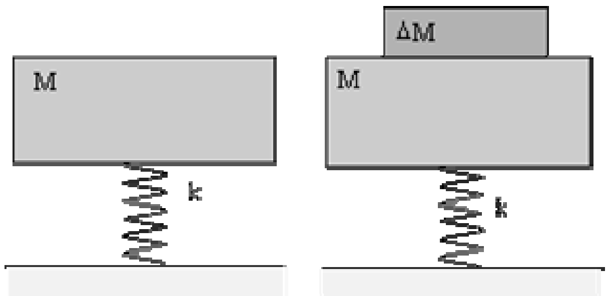
k est égale à la pente de la droite $\Delta F = f(\Delta x)$

142- Méthode dynamique (méthode des surcharges)

$\omega^2_0 = \frac{k}{M}$ $\omega^2_1 = \frac{k}{M + \Delta M}$

par conséquent: $\frac{\Delta M}{k} = \frac{1}{\omega^2_1} - \frac{1}{\omega^2_0}$

ce qui permet de déduire la valeur de k



2- ÉTUDE DE L'AMORTISSEMENT - ISOLATION VIBRATOIRE

21- Amortissement Dans la réalité, les vibrations libres étudiées précédemment n'existent pas car il y a toujours amortissement au cours du temps et l'amplitude des oscillations diminue avec le temps. Ces forces d'amortissement s'opposent au mouvement et sont donc de signes opposées aux vitesses.

211- Amortissement visqueux dû à la résistance fluide

Dans ce cas la force d'amortissement a pour expression :

$$F_f = -b.y'$$

b est appelé **coefficient d'amortissement visqueux**. et a pour dimension MT^{-1}

Ce type d'amortissement se produit à des vitesses faibles pour des surfaces glissantes lubrifiées (amortisseur hydraulique)

212- Amortissement non visqueux dû à la résistance fluide

Pour des vitesses de déplacements comprises entre 2 et 200 m/s, la force d'amortissement est proportionnelle au carré de la vitesse c'est à dire:

$$F_f = \pm a.y'^2$$

Ceci correspond à un régime hydraulique

213- Amortissement par frottement sec ou frottement de COULOMB

Ce type d'amortissement se produit lors d'un glissement sur des surfaces non lubrifiées. Durant le mouvement la force d'amortissement est donnée par la loi de COULOMB:

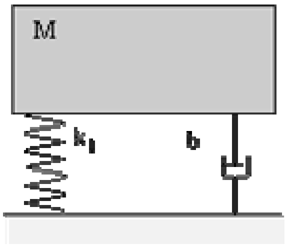
$$F_f = \pm f\ N$$

où N est la composante normale de l'action de contact et f le coefficient de frottement sec

22- Étude d'un système amorti (amortissement visqueux)

221- Vibrations libres

Considérons le cas précédent de la fondation de machine. en appelant Y le déplacement de M par rapport à la position d'équilibre statique, nous avons l'équation du mouvement:



$-k.Y - b.Y' = M.Y''$ soit $M.Y'' + b.Y' + k.Y = 0$ ou

$$Y'' + \frac{b}{M}.Y' + \frac{k}{M}.Y = 0$$

en posant: $\frac{k}{M} = \omega^2_0$ et $\frac{b}{M} = 2.\varepsilon.\omega_0$

nous obtenons:

$$\boxed{Y'' + 2\,\varepsilon\,\omega_0\,Y' + \omega^2_0.Y = 0}$$

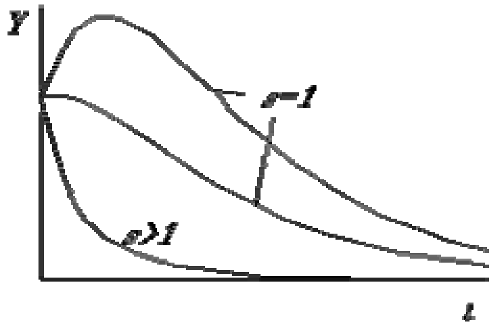
• Cherchons pour Y une solution particulière de la forme:

$Y = A.e^{\alpha t}$, $\alpha \in R$,

soit $Y' = \alpha.A.e^{\alpha t}$ et $Y'' = \alpha^2.A.e^{\alpha t}$

par conséquent, l'équation étant satisfaite quel que soit t, on déduit:

$$\boxed{\alpha^2 + 2.\varepsilon.\omega_0.\alpha + \omega^2_0 = 0}$$



calculons: $\Delta' = b'^2 - a.c = \varepsilon^2.\omega^2_0 - \omega^2_0 = \omega^2_0(\varepsilon^2 - 1)$

a) $\Delta > 0$ $\varepsilon > 1$ ***(amortissement élevé)***

$\alpha = -\varepsilon.\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$

soit: $Y_1 = A_1.e^{-\varepsilon\omega_0 t}.e^{\omega_0\sqrt{\varepsilon^2-1}\,t}$ et $Y_2 = A_2.e^{-\varepsilon\omega_0 t}.e^{-\omega_0\sqrt{\varepsilon^2-1}\,t}$

et $Y = Y_1 + Y_2$

$$\boxed{Y = e^{-\varepsilon\omega_0 t}\left(A_1\,e^{\omega_0\sqrt{\varepsilon^2-1}\,t} + A_2\,e^{-\omega_0\sqrt{\varepsilon^2-1}\,t}\right)}$$

Le mouvement est dit **"apériodique"**

b) $\Delta = 0$ $\varepsilon = 1$ ***(amortissement critique)***

Dans ce cas, on montre que:

$$\boxed{Y = e^{-\varepsilon\omega_0 t}.(B_1.t + B_2)}$$

et que les allures des courbes de Y en fonction du temps sont identiques à celles obtenues pour un mouvement apériodique

c) $\Delta < 0$ $\varepsilon < 1$ ***(amortissement faible)***

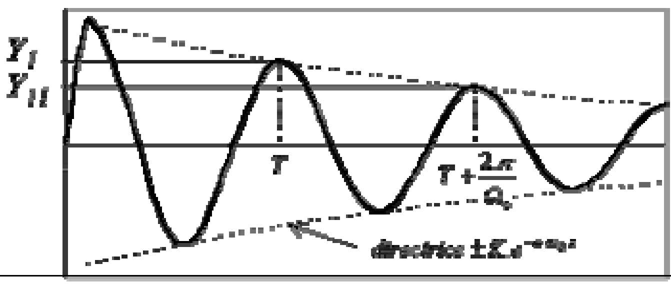
$\alpha = -\varepsilon.\omega_0 \pm i.\omega_0\sqrt{1-\varepsilon^2} = -\varepsilon.\omega_0 \pm i.\Omega_0$

Ω_0 est appelé la pseudo-période propre du système amorti. alors l'expression de Y peut se mettre sous la forme:

$$\boxed{Y = e^{-\varepsilon\omega_0 t}.(C_1.\cos\Omega_0 t + C_2.\sin\Omega_0 t)}$$

On obtient un mouvement **"sinusoïdal amorti".**

application: détermination de ε quand ε est faible:



$$\frac{Y_1}{Y_2} = \frac{e^{-\varepsilon\omega_0 t}}{e^{-\varepsilon\omega_0\left(t+\frac{2\pi}{\Omega_0}\right)}} = e^{\varepsilon\omega_0\frac{2\pi}{\Omega_0}}$$

d’où

$$\varepsilon = \frac{\Omega_0}{2.\pi.\omega_0}.\ln\frac{Y_1}{Y_2}$$

si ε est supposé faible, on a $\Omega_0 = \omega_0.\sqrt{1-\varepsilon^2} \approx \omega_0$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{1}{2.\pi}.\ln\frac{Y_1}{Y_2}}$$