



OFPPT

ROYAUME DU MAROC

مكتب التكوين المهني وإنعاش الشغل

Office de la Formation Professionnelle et de la Promotion du Travail
Direction Recherche et Ingénierie de la Formation

**RESUME THEORIQUE
&
GUIDE DE TRAVAUX PRATIQUES**

MODULE 22 : RESISTANCE DES MATERIAUX

Secteur : FABRICATION MECANIQUE

Spécialité : T.S.M.F.M

Niveau : TS

PORTAIL DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE AU MAROC

Télécharger tous les modules de toutes les filières de l'OFPPT sur le site dédié à la formation professionnelle au Maroc : www.marocetude.com

Pour cela visiter notre site www.marocetude.com et choisissez la rubrique :

MODULES ISTA



The screenshot shows the website interface for Maroc Etude.Com. At the top, a navigation bar contains the following links: HOME, LIVRES, **MODULES ISTA**, ANNUAIRE ECOLES, DOCTORAT, LETTRE DE MOTIVATION, NOUS CONTACTER, and SE CONNECTER. Below the navigation bar is the site's logo, "Maroc Etude.Com", and the tagline "Connaissance - Métier - Technique". A secondary navigation bar includes links for "Annonces Google", "Emploi Maroc", "Messagerie", "Telecharger Un Jeu", and "Maroc Annonces". A search bar is located in the top right corner.

The main content area is divided into three columns:

- Left Column:** Contains a notification "Nous avons 14 invités en ligne", a list of links under "Annonces Google" (Annonces Google, Emploi Maroc, Jeux Telecharger Gratuit, Jeux PC En Ligne), a "Connexion" section with a dropdown arrow, a login form with fields for "Identifiant" (containing "sniper") and "Mot de passe", a "Se souvenir de moi" checkbox, and a "Connexion" button. Below the form are links for "Mot de passe oublié ?" and "Identifiant oublié ?".
- Center Column:** Features a promotional banner for "MacKeeper" with a "-20%" discount. The text reads: "Notre Bibliothèque que ...Livres à Télé charger Gratuitement", "MacKeeper -20%", "Complete your Purchase Now and save 20% Guaranteed with this Coupon Code", and "Apply Discount Automatically". It includes logos for Mac and Universal and a quote: "On ne jouit bien que de ce qu'on partage" [Madame de Genlis].
- Right Column:** Contains a "recherche..." search bar and a list of links under "Annonces Google": "Jeu De Jeux", "Jeux Sur Internet", "Ecole Ingénieur", "Dépanner et configurer votre réseau à domicile (Outil de Diagnostic)", "Wi-Fi / Ethernet", "Console de jeu", "Imprimante", and "Messagerie".



Document élaboré par :

Nom et prénom
CDC-GM

EFP

DR

Mise à jour par

Nom et prénom
ALBU Octavian

CDC –GM

Révision linguistique

-
-
-

Validation

Nom et prénom
ETTAIB Chouaïb

directeur CDC-GM

-

**MODULE :****Durée :72 H****60% : théorique****37% : pratique****OBJECTIF OPERATIONNEL DE PREMIER NIVEAU
DE COMPORTEMENT****COMPORTEMENT ATTENDU**

Pour démontrer sa compétence, le stagiaire doit appliquer des notions de résistance des matériaux, selon les conditions, les critères et les précisions qui suivent

CONDITIONS D'EVALUATION

- Travail individuel
- À partir :
 - de plan, de croquis et des données;
 - d'un cahier des charges ;
 - des documents et données techniques ;
 - de maquettes et pièces existantes ;
 - de consignes et directives
 - des études de cas
 - d'un système mécanique
- À l'aide :
 - d'une calculatrice (éventuellement un logiciel de calcul)
 - de formulaires, abaques et diagrammes

CRITERES GENERAUX DE PERFORMANCE

- Démarche méthodique de travail
- Précision et exactitude des calculs
- Respect des hypothèses et principes de la RDM
- Respect du cahier des charges et les contraintes de fonctionnement
- Analyse de la valeur
- Argumentation et justification des différents choix
- Traçabilité du travail et notes de calculs

**OBJECTIF OPERATIONNEL DE PREMIER NIVEAU
DE COMPORTEMENT****PRECISIONS SUR LE COMPORTEMENT
ATTENDU****CRITERES PARTICULIERS DE PERFORMANCE**

- | | |
|---|--|
| A. Définir et calculer les contraintes simples dans une poutre isostatique soumise à des efforts coplanaires et dans l'espace | - Interprétation correct des hypothèses de RDM
- Maîtrise du vocabulaire utilisé en RDM
- Choix de la méthode de travail |
| B. Dimensionner en statique des composants mécaniques en tenant compte de la pression du contact | - Analyse de problème
- Dimensionnement correcte et argumenté
- Utilisation justifiée des formules |
| C. Calculer et vérifier des éléments d'assemblage rivés, vissés ou soudés | - Souci de sécurité dans le dimensionnement
- Choix de la méthode et des formules de calculs
- Exactitude et précision des calculs |
| D. Dimensionner et vérifier un composant métallique en tenant compte des déformations | - Dimensionnement correcte et argumenté en tenant compte des déformations
- Exactitude des calculs |
| E. Dimensionner et vérifier les enveloppes et solides d'égale résistance | - Analyse de problème
- Exactitude des calculs
- Méthode de travail |

**OBJECTIFS OPERATIONNELS DE SECOND NIVEAU**

Le stagiaire doit maîtriser les savoirs, savoir-faire, savoir percevoir ou savoir être jugés préalables aux apprentissages directement requis pour l'atteinte de l'objectif opérationnel de premier niveau, tels que :

Avant d'apprendre à définir et calculer les contraintes simples dans une poutre isostatique soumise à des efforts coplanaires et dans l'espace (A) :

1. Interpréter les notions et expressions courantes relatives à la résistance des matériaux
2. Respecter les hypothèses fondamentales de la résistance des matériaux
3. Classer les sollicitations en relation avec les essais mécaniques
4. Retrouver les caractéristiques mécaniques d'un matériau

Avant d'apprendre à dimensionner en statique des composants mécaniques en tenant compte de la pression du contact (B) :

5. Distinguer les types de charge et les efforts

Avant d'apprendre à calculer et vérifier des éléments d'assemblage rivés, vissés ou soudés (C) :

6. Se soucier de la sécurité dans le dimensionnement des composants et introduire les coefficients de sécurité dans les calculs en mécanique
7. Déterminer les contraintes : normales et tangentielles
8. Définir la relation entre le torseur des efforts et les contraintes
9. Tenir compte dans les calculs des coefficients de concentration de contraintes

Avant d'apprendre à dimensionner et vérifier un composant métallique en tenant compte des déformations (D) :

10. Définir la notion d'élasticité
11. Etudier la relation entre le torseur des efforts et des déplacements

Avant d'apprendre à dimensionner et vérifier les enveloppes et solides d'égale résistance (E) :

12. Maîtriser les calculs de la RDM pour différentes sollicitations simples



PRESENTATION DU MODULE

Ce module de compétence générale se dispense en cours de la première année du programme formation. Ce module est en parallèle à tous les modules de compétences à caractère étude et conception. Un chevauchement avec le module sur les mathématiques et la mécanique appliquée peut être éventuellement envisagé.

DESCRIPTION

L'objectif de ce module est de faire acquérir les outils et les principes de la résistance des matériaux relatifs au dimensionnement des composants et des ensembles mécaniques et notamment des montages d'usinage. Il vise surtout à rendre le stagiaire responsable de ces calculs de dimensionnement et de ses propositions pour garantir le maximum de sécurité à moindre coût. Le stagiaire a aussi la responsabilité dans le choix des éléments mécaniques du commerce notamment les montages modulaires qui remplissent les performances attendues dans le montage étudié.

SOMMAIRE

1	DEFINITIONS ET HYPOTHESES	9
	1.1 Généralités	9
	1.2 Buts de la résistance des matériaux	9
	1.3 Hypothèses	9
	1.3.1. Le matériau	9
	1.3.2 Notion de Poutre	10
	1.3.3 Les forces extérieures	11
	1.3.4 Les déformations	11
	1.3.5 Hypothèse Navier & Bernoulli	12
	1.3.6 Principe de St. Venan et conséquence	12
	1.3.7 Liaisons	12
	1.2. Notion de contrainte - Vecteur contrainte	13
	1.2.1 Définition du torseur de cohésion	14
	1.2.2 Repère de définition des sollicitations	14
	1.2.3 Dénomination des composantes des éléments de réduction du torseur des efforts de cohésion	14
	1.2.4 Contrainte en un point M d'une section S	15
	1.2.4.1 Définitions	15
	1.2.4.2 Contrainte normale	16
	1.2.4.3 Contraintes tangentielles	16
	1.2.4.4 Relations entre torseur de cohésion et contraintes	16
	1.3 Notions sur les coefficients de sécurité	16
	1.4. Diagrammes	17
2	LES SOLLICITATIONS SIMPLES	17
	2.1 La Traction	17
	2.1.1 Définitions	17
	2.1.2 Contrainte normale	18
	2.1.3 Déformation	18
	2.1.4 Phénomène de concentration de contrainte	19
	2.2. La compression simple	20
	2.3 Le Cisaillement	20
	2.3.1 Définitions	20
	2.3.2 Contrainte de cisaillement	20
	2.3.3 Condition de résistance	21
	2.3.4 Déformation	21
	2.4. La flexion simple	21
	2.4.1 Définitions	21
	2.4.2 Contraintes normales	21
	2.4.3 Allongement / Raccourcissement relatif de la fibre M'M	22
	2.4.4 Expression de la contrainte normale	22
	2.4.5 Relation entre contrainte normale et moment fléchissant	23
	2.4.6 Moment quadratique	23
	2.4.6.1 Définitions	23



	2.4.6.2 Théorème de Huygens	24
	2.4.6.3 Moments quadratiques usuels	25
	2.4.7 Module de flexion	25
	2.4.8 Contrainte normale maximale	26
	2.4.9 Condition de résistance à la contrainte normale	26
	2.4.10 Équation de la déformée	26
	2.5. La torsion simple	27
	2.5.1 Définitions	27
	2.5.2 Contrainte tangentielle de torsion	28
	2.5.3 Condition de résistance	28
	2.5.4 Déformation	28
	2.6 Le Flambage	28
	2.6.1 Définitions	28
	2.6.2 Flambage d'Euler	29
	2.6.3 Contrainte critique	30
	2.6.4 Méthodes de calcul	31
	2.6.4.1 Méthode Euler - Rankine.	31
3	LES ESSAIS	32
	3.1 Essai de traction	32
	3.1.1 Définitions	32
	3.1.2 Courbes de contraintes et déformation	33
	3.1.3 Module d'élasticité longitudinale	33
	3.1.4 Loi de Hooke	33
	3.1.5 Déformations élastiques	34
	3.1.6 Limite élastique	34
	3.1.7 Limite conventionnelle d'élasticité	34
	3.1.8 Limite maximale	34
	3.1.9 Phénomène d'écrouissage	34
	3.1.10 Courbes de traction de divers matériaux	35
	3.2 Essai de résilience	35
	3.3 Essai de dureté	36
	3.3.1 Dureté Brinel	37
	3.3.2 Dureté Vickers	37
	3.3.3 Dureté Rockwell	37
	3.4 Caractéristiques de quelques matériaux	38
4	EXERCICES	39
	4.1 Problème de traction	39
	4.2 Problème de cisailage	40
	4.3 Problème de cisailage des rivets	41
	4.4 Problème de cisailage des soudures	42
	4.5 Problème de calcul des caractéristiques de la section	44
	4.6 Problème de flexion. Poutres sur deux appuis de niveau	46
	4.7 Problème de flexion. Poutre avec porte à faux	47
	4.8 Problème de flexion. Poutre sur deux appuis de niveau	49
	4.9 Problème de flexion. Poutres encastées à une extrémité.	50
5	VECTEURS	53
6	TRAVAUX DIRIGEE	60



1. DEFINITIONS ET HYPOTHESES

1.1 Généralités

La Résistance des Matériaux (que nous désignerons maintenant par RDM) est la science du dimensionnement. Elle est issue d'une théorie plus générale, la Mécanique des Milieux Continus, qui permet de concevoir une pièce mécanique, un ouvrage d'art ou tout objet utilitaire, c'est à dire d'abord imaginer les formes et le squelette géométrique qui remplissent les fonctions demandées ; et ensuite déterminer les quantités de matière nécessaires et suffisantes pour réaliser ces formes en assurant une résistance sans dommage de l'objet à tous les efforts auxquels il sera soumis pendant son service. Ce dimensionnement fait appel à des calculs qui prévoient le comportement de l'objet dont la conception doit réunir les meilleures conditions de sécurité, d'économie et d'esthétique.

1.2 Buts de la résistance des matériaux

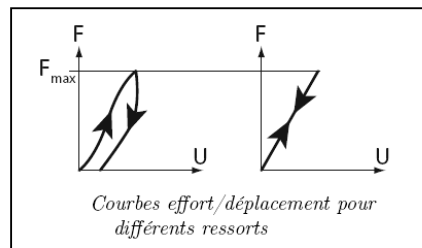
La résistance des matériaux a trois objectifs principaux :

- ◆ la connaissance des caractéristiques mécaniques des matériaux. (comportement sous l'effet d'une action mécanique)
- ◆ l'étude de la résistance des pièces mécaniques. (résistance ou rupture)
- ◆ l'étude de la déformation des pièces mécaniques.

1.3 Hypothèses

1.3.1. Le matériau :

- **Elastique linéaire**: Un matériau est dit élastique s'il retrouve entièrement sa forme ou son volume après avoir subi un cycle de charge/décharge quelconque.



Pour la courbe 1, le matériau n'est pas élastique, puisqu'il ne revient pas dans sa configuration initiale après la décharge. Par contre, la courbe 2 caractérise un comportement élastique linéaire : la relation liant F à U étant linéaire.

- **Homogénéité** : on supposera que tous les éléments de la matière, aussi petits soient ils, sont identiques. (hypothèse non applicable pour le béton ou le bois)





- **Isotropie** : on supposera qu'en tout point et dans toutes les directions, la matière a les mêmes propriétés mécaniques. (hypothèse non applicable pour le bois ou les matériaux composites)

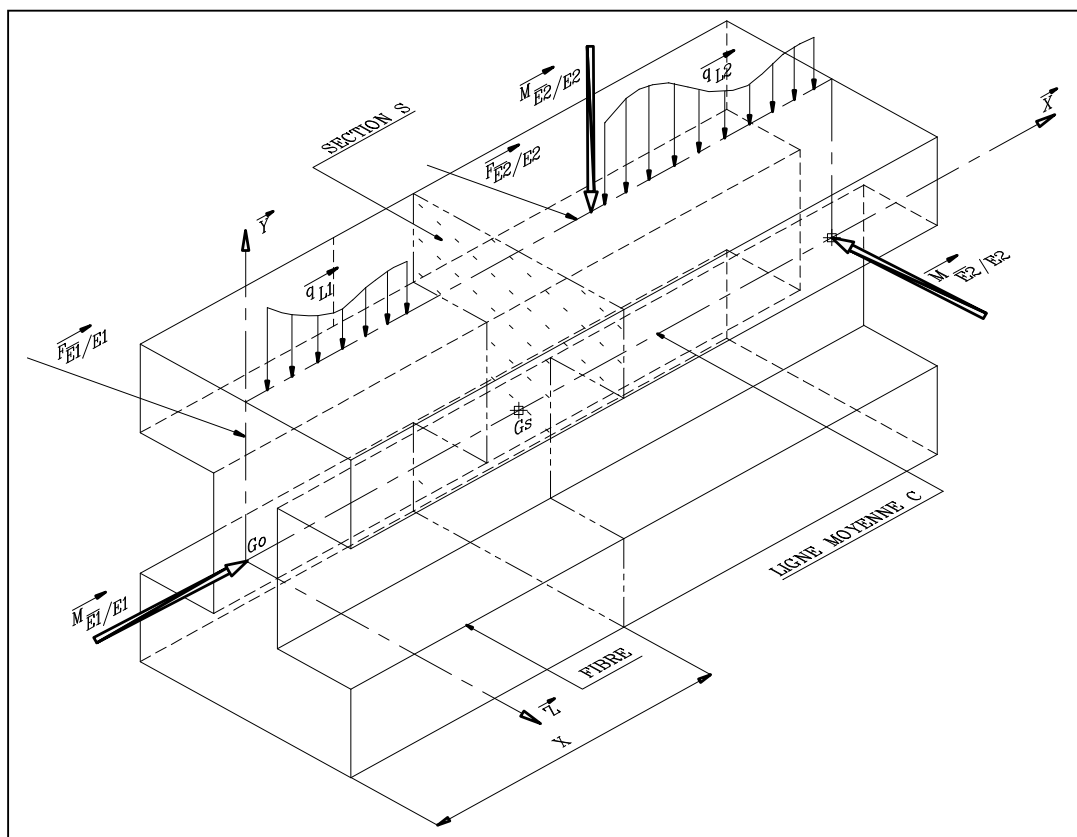
1.3.2 Notion de Poutre

La **RDM** étudie des pièces dont les formes sont relativement simples. Ces pièces sont désignées sous le terme de « poutres ».

Poutre : on appelle *poutre* un solide engendré par une surface plane (S) dont le centre de surface G décrit une courbe plane (C) appelée *ligne moyenne*.

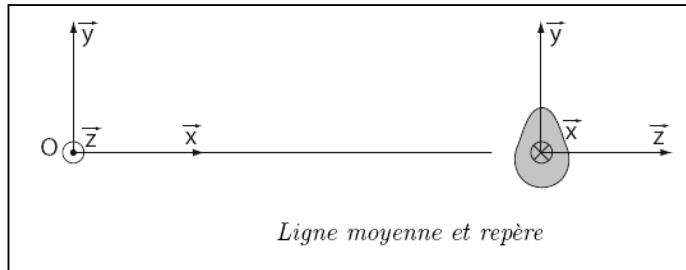
Les caractéristiques de la poutre sont :

- ligne moyenne droite ou à grand rayon de courbure.
- section droite (S) constante ou variant progressivement.
- grande longueur par rapport aux dimensions transversales. (en général 10 fois)
- existence d'un plan de symétrie. soit (\bar{X}, \bar{Y}) , soit (\bar{X}, \bar{Z}) .



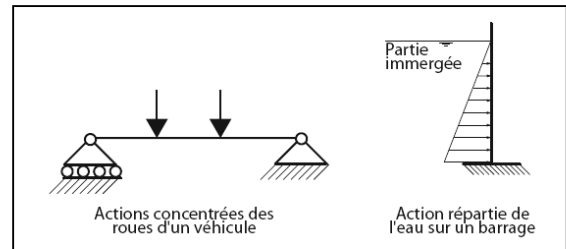
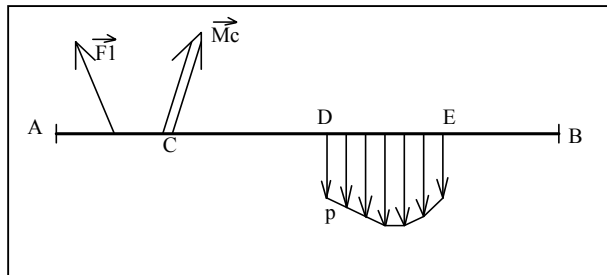


Pour décrire la poutre on peut donc la représenter par sa ligne moyenne et sa section droite

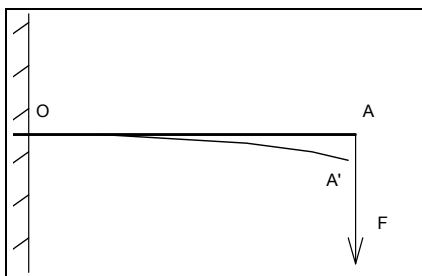


1.3.3 Les forces extérieures

- **Plan de symétrie** : les forces extérieures seront situées dans le plan de symétrie de la poutre ou alors disposées symétriquement par rapport à ce plan.
- **Types d'actions mécaniques extérieures** : deux types d'actions mécaniques peuvent s'exercer sur la poutre :
 - charges concentrées (\vec{F}_i ou moment \vec{M}_c)
 - charges réparties p sur DE. (exprimées en N/m).



1.3.4 Les déformations



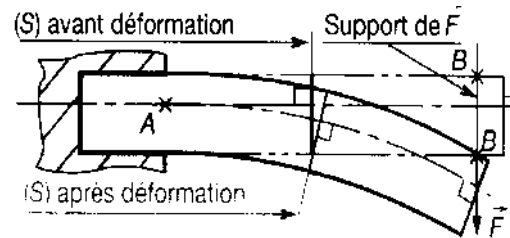
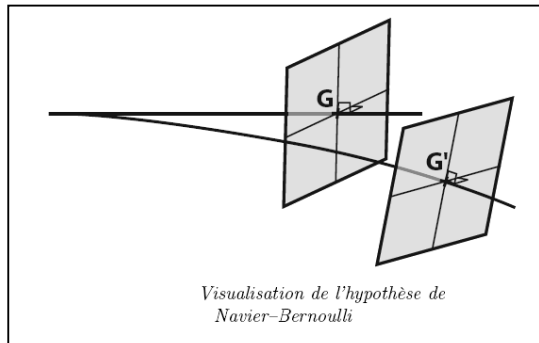
Les déformations étant petites devant les dimensions de la poutre, les actions s'exerçant sur celle-ci seront calculées à partir du principe fondamental de la statique.

Les supports des forces seront eux considérés comme constants.



1.3.5 Hypothèse Navier & Bernoulli :

Les sections planes normales aux fibres avant déformation demeurent planes et normales aux fibres après déformation.



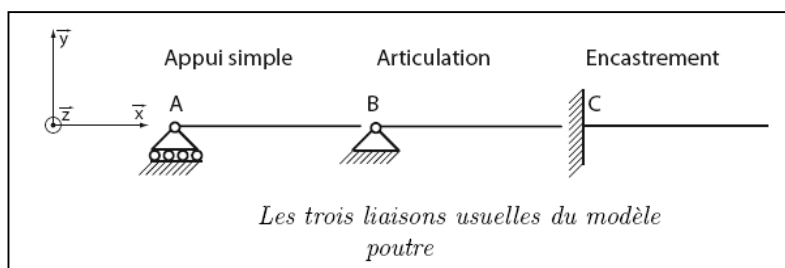
1.3.6 Principe de St. Venan et conséquences:

Etant donné un solide déformable, si sur une partie (Σ) de sa frontière on remplace une distribution des forces appliquées par une autre distribution, équivalente et agissant également sur (Σ) les sollicitations restent inchangées dans toute région du solide suffisamment éloignée de (Σ)

La conséquence directe de ce principe est que les résultats obtenus par un calcul de RDM sur une poutre ne s'appliquent valablement qu'à une distance suffisamment éloignée de la région d'application des actions mécaniques extérieures concentrées et des liaisons. En pratique on peut considérer que les résultats sont valables à partir d'une distance égale à 2 fois la plus grande dimension transversale

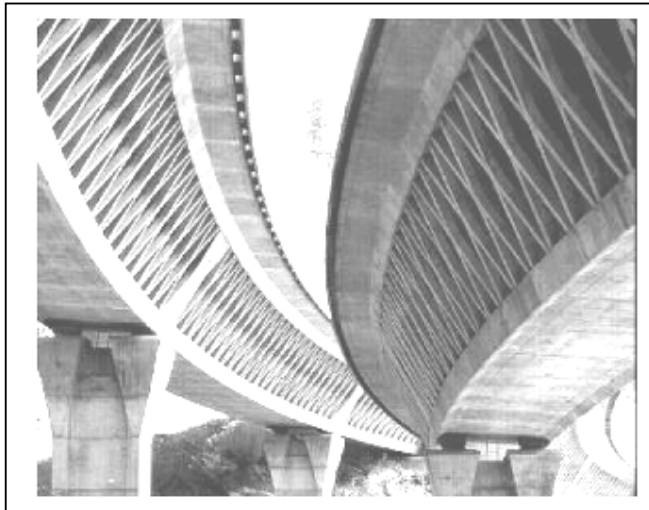
1.3.7 Liaisons :

- a) *L'appui simple* - constitué, par exemple, par un rouleau cylindrique, donne lieu à une réaction de direction imposée passant par le point d'appui ; cette réaction est définie par une seule composante en résultante perpendiculaire au contact.
- b) *L'articulation* - constituée, pour les poutres métalliques, par une rotule comprise entre deux balanciers en acier moulé et, donne lieu à une réaction dont on ne connaît pas la direction, mais qui passe par le centre de la rotule ou par le centre de la section rétrécie ; cette réaction est définie par ses deux composantes suivant deux directions non parallèles du plan moyen.
- c) *L'encastrement* - a pour objet d'assurer l'invariabilité de la section d'extrémité d'une poutre ; la réaction d'appui comprend une force passant par le centre de gravité G de la section d'encastrement et contenue dans le plan moyen, et un moment normal au plan moyen ; la réaction d'appui est donc définie par trois composantes : les deux projections sur deux axes situés dans le plan moyen et la projection du moment sur l'axe normal au plan moyen.

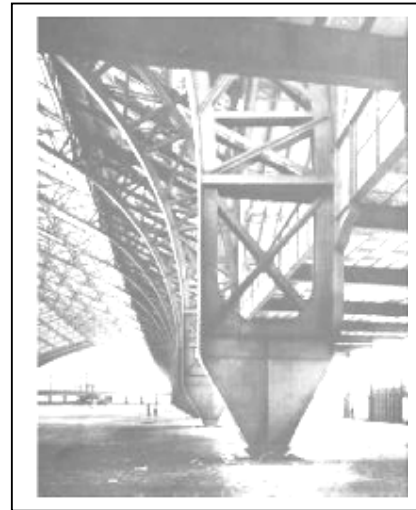




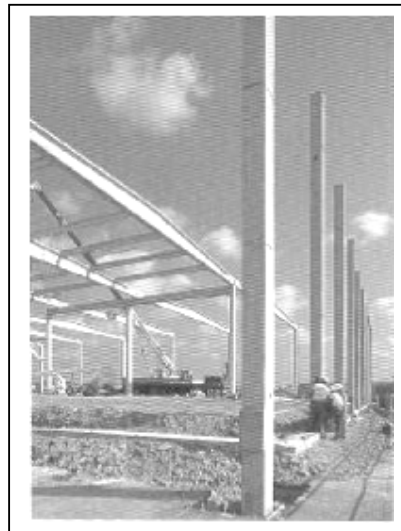
a) appui simple :



b) articulation :



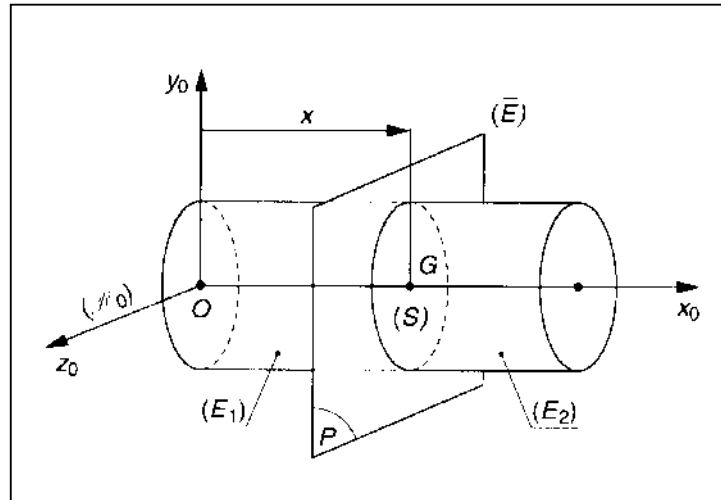
b) encastrement :



1.2. Notion de contrainte - Vecteur contrainte :

Soit (E) le solide assimilé à une poutre et (\bar{E}) l'ensemble extérieur à (E) . $R_0=(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ est le repère lié à (E) tel que \bar{x}_0 est confondu avec la ligne moyenne. Considérons un plan (P) normal à \bar{x}_0 définissant la section droite (S) de (E) . Soit G le centre de surface de (S) , $\overrightarrow{OG} = x.\bar{x}_0$ définissant la position de la section droite par rapport à R_0 .

La coupure fictive par le plan (P) partage la poutre en deux tronçons (E_1) et (E_2)



1.2.1 Définition du torseur de cohésion

Le torseur de cohésion $_{G_S} \{T_{coh}\}_{R_0}$ est le torseur associé à l'ensemble des actions mécaniques exercées par le tronçon (E_2) sur le tronçon (E_1) de la poutre dont les éléments de réduction sont exprimés au point G centre de la surface (S)

$$_G \{T_{coh}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{array} \right\}$$

Remarque :

Ces actions, non visibles, sont internes au matériau et lui permettent de garder son intégrité physique d'où le nom de cohésion.

Le torseur de cohésion est toujours le torseur des actions mécaniques exercées par le tronçon de droite (E_2) sur le tronçon de gauche (E_1)

\vec{R} et \vec{M}_G sont fonctions de l'abscisse x du centre de surface G de (S)

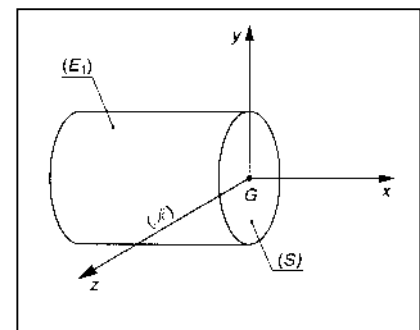
Pour simplifier les écritures, il n'y aura pas d'indices sur les éléments de réduction

1.2.2 Repère de définition des sollicitations

Soit $R=(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ le repère local associé à la section droite fictive (S) . Ce repère est tel que \vec{x} définit la normale extérieure à (S)

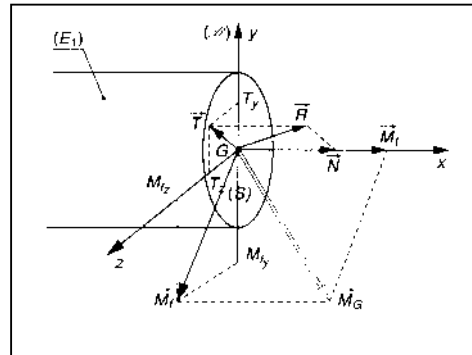
relative à (E_1) . \vec{y} et \vec{z} appartiennent alors au plan (P) de la section (S) .

$$\{T_{coh}\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{array} \right\}_{G,R}$$



1.2.3 Dénomination des composantes des éléments de réduction du torseur des efforts de cohésion

$$\{T_{coh}\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} = \vec{N} + \vec{T} \\ \vec{M}_G = \vec{M}_t + \vec{M}_f \end{array} \right.$$



- Effort normal \vec{N} : projection de \vec{R} sur l'axe \vec{x}
 - Effort tranchant \vec{T} : projection de \vec{R} sur la section droite (\vec{y}, \vec{z})
 - Moment de torsion \vec{M}_t : projection de \vec{M}_G sur l'axe \vec{x}
 - Moment de flexion \vec{M}_f : projection de \vec{M}_G sur la section droite (\vec{y}, \vec{z})
- \vec{T} et \vec{M}_f n'ayant pas de direction privilégiée dans (\vec{y}, \vec{z}) il est préférable d'utiliser les composantes algébriques de ces vecteurs

$$\left\{ T_{coh} \right\}_G = \left\{ \begin{matrix} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{matrix} \right\}_G = \left\{ \begin{matrix} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{matrix} \right\}_R$$

N : composante algébrique de \vec{N} sur \vec{x}
 T_y : composante algébrique de \vec{T} sur \vec{y}
 T_z : composante algébrique de \vec{T} sur \vec{z}

M_t : composante algébrique de \vec{M}_t sur \vec{x}
 M_{fy} : composante algébrique de \vec{M}_f sur \vec{y}
 M_{fz} : composante algébrique de \vec{M}_f sur \vec{z}

1.2.4 Contrainte en un point M d'une section S

La contrainte caractérise les liaisons mécaniques internes au matériau (représentées par le torseur de cohésion $\left\{ T_{coh} \right\}_R$ sur chaque **élément de surface** dS de la section S quelconque. On peut choisir dS aussi petit que l'on veut.

Unité : le N/mm^2 soit le Mpa
 Rappel : $1 \text{ Mpa} = 10^6 \text{ Pa} = 1 \text{ N/mm}^2 = \text{environ } 10 \text{ bar}$

1.2.4.1 Définitions

La contrainte \vec{C} est le rapport entre l'action mécanique $d\vec{F}$, qui s'exerce sur l'élément de surface dS de la section S

$$\vec{C} = \frac{d\vec{F}}{dS} = \sigma \cdot \vec{x} + \tau_y \cdot \vec{y} + \tau_z \cdot \vec{z}$$

tel que $\left| \begin{matrix} \sigma : \text{contrainte normale} \\ \tau_y \text{ et } \tau_z : \text{contraintes tangentielles} \end{matrix} \right.$



1.2.4.2 Contrainte normale

Considérons un torseur de cohésion ${}_{G_S}\{T_{coh}\}_R$ dont la résultante \vec{R} n'a qu'une composante N sur \vec{X} .

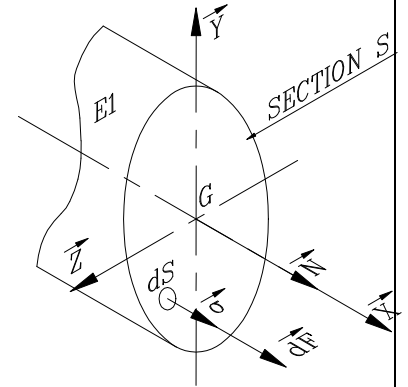
$$\vec{R} = N \cdot \vec{x} = \sum_S d\vec{F} = \sum_S \vec{C} \cdot dS = \sum_S \sigma \cdot \vec{x} \cdot dS$$

$$N = \sum_S \sigma \cdot ds$$

Si nous supposons une répartition constante de la contrainte σ sur S

$$\Rightarrow N = \sum_S \sigma \cdot dS = \sigma \cdot \sum_S dS = \sigma \cdot S$$

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{S}}$$



1.2.4.3 Contraintes tangentielles

Considérons un torseur de cohésion ${}_{G_S}\{T_{coh}\}_R$ dont la résultante \vec{R} n'a qu'une composante T_y sur \vec{Y} .

$$\vec{R} = T_z \cdot \vec{z} = \sum_S d\vec{F} = \sum_S \vec{C} \cdot dS = \sum_S \tau_z \cdot \vec{z} \cdot dS$$

$$T_z = \sum_S \tau_z \cdot ds$$

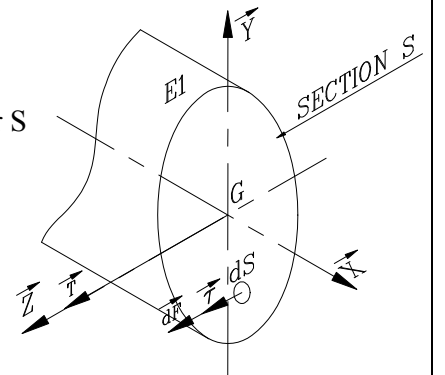
Si nous supposons une répartition constante de la contrainte τ_y sur S

$$\Rightarrow T_z = \sum_S \tau_z \cdot dS = \tau_z \cdot \sum_S dS = \tau_z \cdot S$$

$$\boxed{\tau_z = \frac{T_z}{S}}$$

de même

$$\boxed{\tau_y = \frac{T_y}{S}}$$



1.2.4.4 Relations entre torseur de cohésion et contraintes

$$\overrightarrow{R_{E1 \rightarrow E2}} = \vec{N} + \vec{T} = \sum_S (\vec{\sigma} + \vec{\tau}_y + \vec{\tau}_z) dS \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{R_{E1 \rightarrow E2}} = \vec{N} + \vec{T} = (\vec{\sigma} + \vec{\tau}_y + \vec{\tau}_z) S$$

$$\overrightarrow{M_{G_{E1 \rightarrow E2}}} = \sum_S \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{\sigma} + \vec{\tau}_y + \vec{\tau}_z) dS$$

1.3 Notions sur les coefficients de sécurité

Pour qu'une structure (machine, véhicule...) puisse supporter en toute sécurité les charges normalement la sollicitent, il suffit qu'elle puisse résister à des charges plus élevées. La capacité à supporter ces charges constitue la résistance de la structure. Le coefficient de sécurité s est

$$s = \frac{\text{charge admissible}}{\text{charges exercées}} = \frac{\text{résistance réelle}}{\text{résistance nécessaire}}$$

La sécurité est obtenu si, sous charge

- les déformations du matériau restent élastiques
- la rupture du matériau n'est pas atteinte



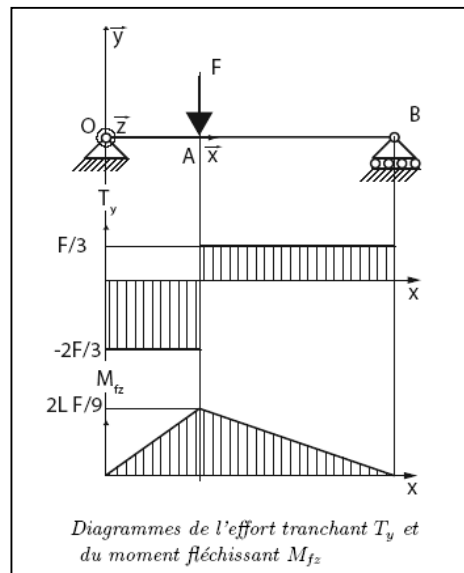
Donc :

$$s = \frac{R_e}{R_p} = \frac{\text{résistance élastique}}{\text{résistance pratique}} \quad \text{ou} \quad s = \frac{R_r}{R_p} = \frac{\text{résistance à la rupture}}{\text{résistance pratique}}$$

1.4. Diagrammes

La RDM est une science qui permet de dimensionner les pièces. Ainsi pour pouvoir appliquer des critères de dimensionnement (qui portent sur les grandeurs locales), il est utile de repérer la section de la poutre qui est la plus sollicitée. En effet, nous verrons que lorsque les efforts intérieurs sont maximaux alors il existe au moins un point de la section où les grandeurs locales le sont aussi. On utilise couramment des diagrammes de sollicitation qui permettent de visualiser rapidement les sections de la poutre les plus chargées.

Exemple d'un diagramme de l'effort tranchant T_y et du moment fléchissant M_{fz} .

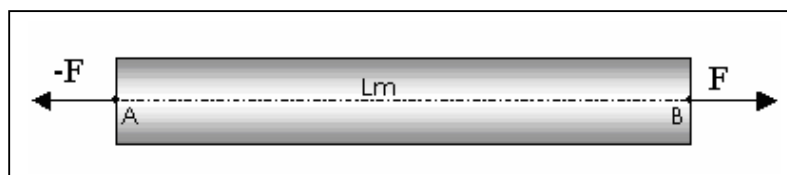


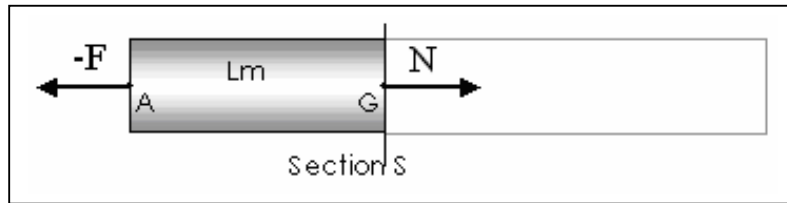
2. LES SOLLICITATIONS SIMPLES

2.1 La Traction :

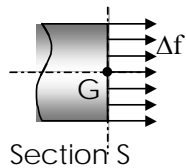
2.1.1 Définitions

Une poutre est sollicitée à la traction simple lorsqu'elle est soumise à deux forces directement opposées, appliquées au centre de surface des sections extrêmes et qui tendent à l'allonger.





2.1.2 Contrainte normale :



Chaque élément de surface ΔS supporte un effort de traction Δf parallèle à la ligne moyenne.

Il y a répartition uniforme des contraintes dans la section droite. D'où :

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

σ : contrainte normale en Mpa ou en N/mm²

N : effort normal en N

S : aire de la section droite en mm²

Condition de résistance :

$$R_{pe} = \frac{R_e}{s}$$

Soient :

- ☞ R_e la résistance élastique du matériau (en Mpa)

- ☞ s un coefficient de sécurité ($s > 1$);

- ☞ R_{pe} la résistance pratique à l'extension

$$\sigma \leq R_{pe}$$

Alors, la condition de résistance s'écrit :

2.1.3 Déformation :

Soient :

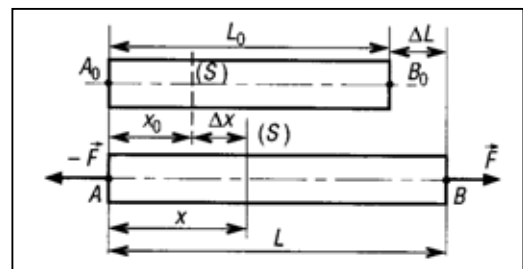
L_0 : longueur initiale de la poutre (en mm)

L : longueur de la poutre après déformation (en mm)

$\Delta L = L - L_0$: Allongement de la poutre (en mm)

ε : Allongement relatif de la poutre (sans unité)

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$





En déformation élastique, la contrainte σ varie linéairement en fonction de l'allongement relatif ε .

Loi de Hooke : $\sigma = E \varepsilon$

σ : contrainte normale en N/mm²

E : module d'élasticité longitudinale (module d'Young) en Mpa

ε : allongement relatif (pas d'unité)

2.1.4 Phénomène de concentration de contrainte :

Lorsqu'une poutre possède une variation brusque de sa section, les hypothèses de la Résistance des matériaux ne sont plus vérifiées. En traction, la répartition de la contrainte normale σ n'est plus uniforme. L'essai de traction ci-dessous, a été réalisé sur une poutre de section rectangulaire, percée d'un trou cylindrique :

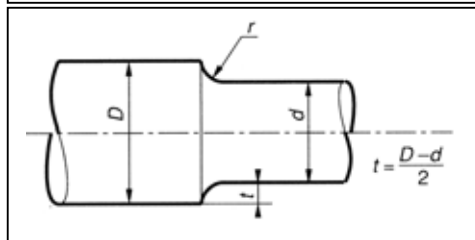


Loin du perçage, la contrainte normale vaut $4,15 \cdot 10^{-3}$ MPa. Par contre, à proximité de ce même perçage la contrainte normale grimpe à $9,138 \cdot 10^{-3}$ MPa, soit une peu plus du double de la valeur précédente.

Pour tenir compte de ce phénomène, nous introduisons la notion de **Coefficient de concentration de contrainte** : K_t

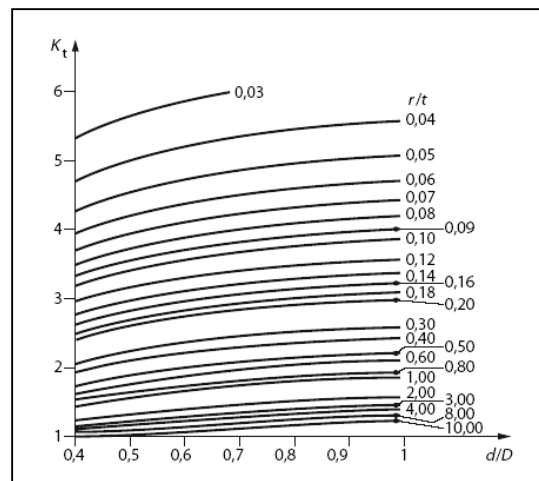
$$\sigma_{no\ min\ ale} = \frac{N}{S} d'ou\ \sigma_{max\ i} = K_t \cdot \sigma_{no\ min\ ale}$$

Condition de résistance : $\sigma_{max\ i} < R_{pe}$



Exemple : D= 100, d=64, r=5
N = 5000 daN

Arbre épaulé en traction





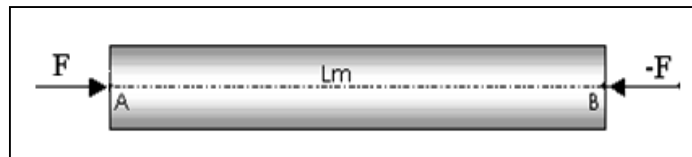
$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{D} &= \frac{64}{100} = 0,64 \\ \frac{r}{t} &= \frac{2r}{D-d} = \frac{10}{100-64} = 0,278 \end{aligned} \right\} K_t = 2,1$$

$$\sigma_{no\ min\ ale} = \frac{4 \times 5000}{\pi \times 64^2} = 1,55 \text{ daN/mm}^2$$

$$\sigma_{max\ i} = K_t \times \sigma_{no\ min\ ale} = 2,1 \times 1,55 = 3,26 \text{ daN/mm}^2$$

2.2. La compression simple

Une poutre est sollicitée à la compression simple lorsqu'elle est soumise à deux forces directement opposées, appliquées au centre de surface des sections extrêmes et qui tendent à la raccourcir.



A l'exception de la fonte et du béton, tous les matériaux ont quasiment le même comportement en traction qu'en compression.

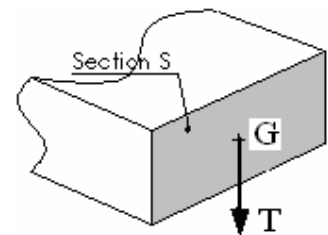
Les relations vues en traction pourront être également appliquées à la compression.

2.3 Le Cisaillement :

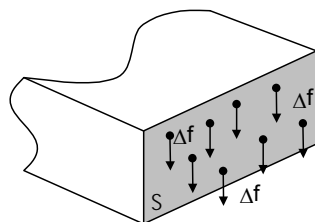
2.3.1 Définitions :

Une poutre est sollicitée en cisaillement lorsque sa section S est soumise à une résultante T appliquée en G (barycentre de la section) et contenue dans le plan (S).

T est appelé effort tranchant.



2.3.2 Contrainte de cisaillement :



Chaque élément de surface ΔS supporte un effort de cisaillement Δf contenu dans le plan (S).

Il y a répartition uniforme des contraintes dans la section droite. D'où :

$\tau = \text{Erreur !}$; τ : contrainte tangentielle en Mpa ou N/mm²

T : effort tranchant en N

S : aire de la section droite cisillée en mm²



2.3.3 Condition de résistance :

- Soient : ☞ R_{eg} la résistance élastique au cisaillement du matériau (en Mpa) ;
- ☞ s un coefficient de sécurité ;
- ☞ $\tau_{adm} = R_{pg}$ la résistance pratique au cisaillement, avec $R_{pg} = R_{eg}/s$

Alors, la condition de résistance s'écrit :

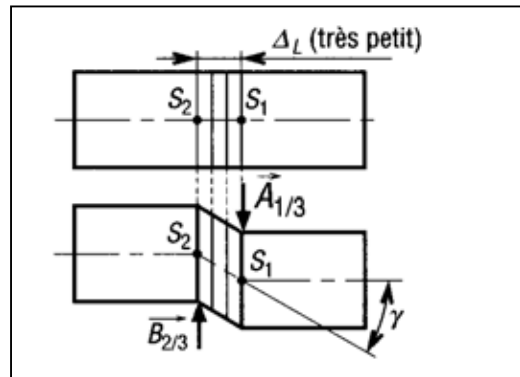
$$\tau \leq \tau_{adm}$$

2.3.4 Déformation :

En déformation élastique, la contrainte de cisaillement τ varie linéairement en fonction de l'angle de glissement γ .

$$\tau = G \gamma$$

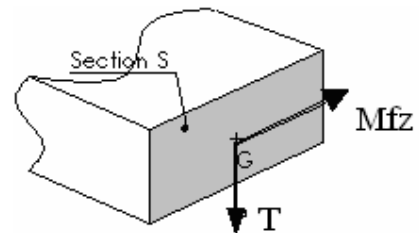
- τ : contrainte tangentielle en N/mm^2
- G : module d'élasticité transversal en Mpa
- γ : angle de glissement en radians



2.4. La flexion simple :

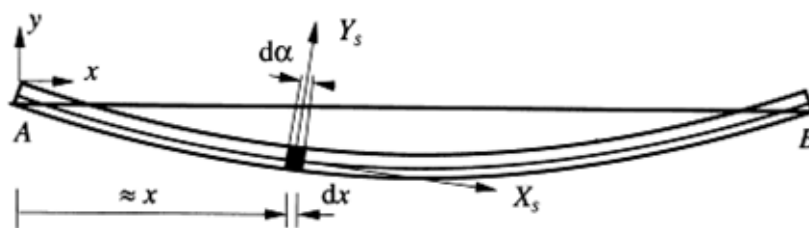
2.4.1 Définitions :

Une poutre est sollicitée en flexion lorsque sa section S est soumise à une action au barycentre composé d'une résultante T contenue dans le plan de symétrie et un moment M_{fz} perpendiculaire à ce dernier. M_{fz} est appelé moment fléchissant, ou moment de flexion.



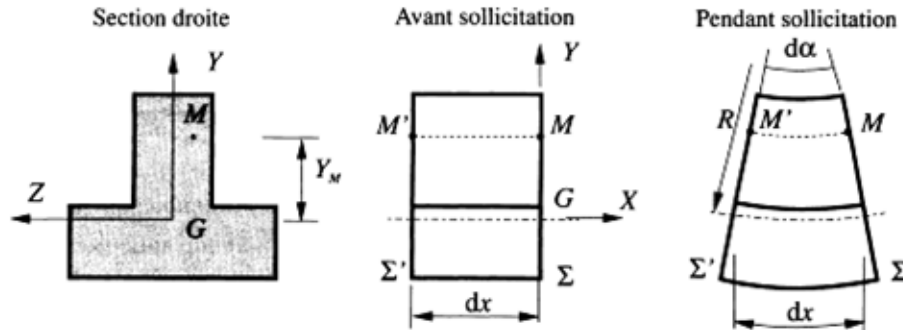
2.4.2 Contraintes normales

La poutre étant sollicitée en flexion simple, la ligne caractéristique peut être assimilée à un arc de cercle de rayon R appelé rayon de courbure





Au cours de la déformation, le tronçon considéré initialement prismatique se transforme en portion de tore de rayon moyen R intercepté d'un angle $d\alpha$



MM' est une fibre du tronçon joignant deux points homologues des sections Σ et Σ'
 Les fibres situées dans le plan (G, \vec{x}, \vec{z}) ne varient pas et sont appelées *fibres neutres*
 Les fibres au dessus de G ($Y > 0$) se raccourcissent et celles en dessous de G ($Y < 0$) s'allongent

2.4.3 Allongement / Raccourcissement relatif de la fibre $M'M$

- coordonnées du point M (Y_M, Z_M) dans le repère local $R = (G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
- longueur initiale $M'M = dx$

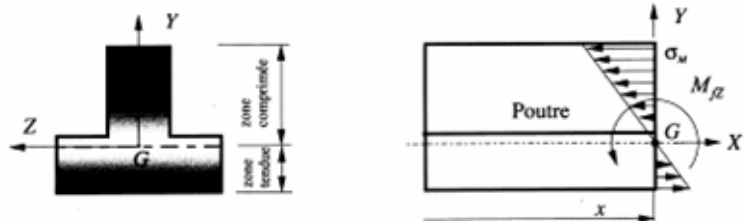
allongement relatif :

$$\varepsilon = -Y_M \frac{d\alpha}{dx}$$

2.4.4 Expression de la contrainte normale

En exprimant la loi de Hooke définie par la relation $\sigma = \varepsilon E$, on obtient :

$$\sigma_M = -E \cdot Y_M \frac{d\alpha}{dx}$$



- la contrainte normale est nulle sur la fibre neutre
- le signe s'inverse à la traversée du plan (G, \vec{x}, \vec{z})
- la répartition est linéaire sur la section droite
- le point de la section le plus sollicité est celui qui est le plus éloigné de la fibre neutre



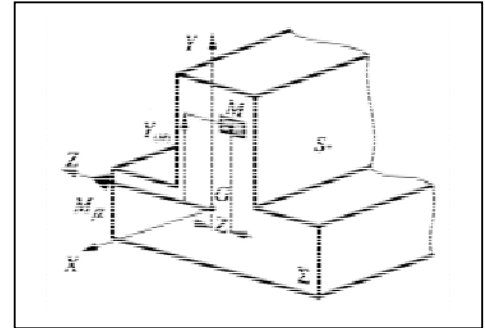
2.4.5 Relation entre contrainte normale et moment fléchissant

Une coupure est effectuée au niveau de la section droite Σ
Soit un pont M de coordonnées (X_M, Y_M, Z_M) et $d\Sigma$ un élément de surface entourant M

Le moment fléchissant Mfz est la somme des moments en G des actions mécaniques élémentaires transmises par les éléments de surface $d\Sigma$ constituant le section droite avec

$$dMfz = -Y \cdot \sigma_M \cdot d\Sigma$$

$$Mfz = -\int_{\Sigma} Y \cdot \sigma_M \cdot d\Sigma = -\int_{\Sigma} Y^2 E \cdot \frac{d\alpha}{dx} \cdot d\Sigma = -E \cdot \frac{d\alpha}{dx} \int_{\Sigma} Y^2 \cdot d\Sigma = -\frac{\sigma}{Y_M} \int_{\Sigma} Y^2 \cdot d\Sigma \text{ donc } \sigma_M = -\frac{Mfz \cdot Y_M}{\int_{\Sigma} Y^2 \cdot d\Sigma}$$



2.4.6 Moment quadratique

2.4.6.1 Définitions

1. Soit (S) une surface plane et un repère orthonormé (O, x, y) associé.

Le moment quadratique élémentaire de ΔS par rapport à (O, x), noté ΔI_{Ox} est défini par :

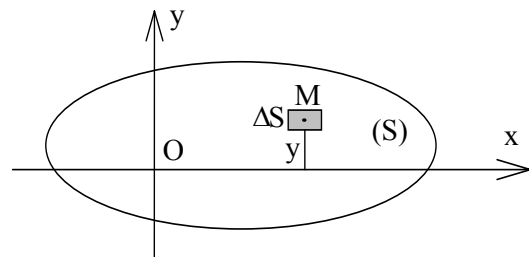
$$\Delta I_{Ox} = y^2 \cdot \Delta S$$

et pour l'ensemble de la surface (S) :

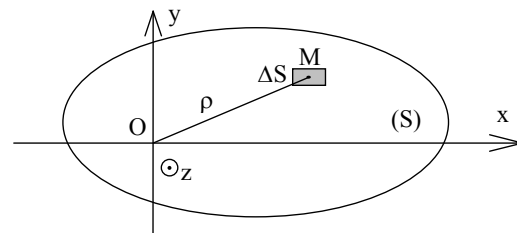
$$I_{Ox} = \sum_{(S)} y^2 \cdot \Delta S$$

Remarques :

- * L'unité de moment quadratique est le mm^4 (ou le m^4)
- * Un moment quadratique est toujours positif.
- * Le moment quadratique dépend uniquement de la géométrie de la section droite



2. Soit (S) une surface plane et un repère orthonormé (O, x, y, z) associé.





Le moment quadratique polaire élémentaire de ΔS par rapport à (O, \vec{z}) perpendiculaire en O au plan de la figure et noté ΔI_O est défini par :

$$\Delta I_O = \rho^2 \cdot \Delta S$$

et pour l'ensemble de la surface (S) :

$$I_O = \sum_{(S)} \rho^2 \cdot \Delta S$$

Propriété :

Considérons le moment quadratique polaire I_O de la surface (S) par rapport à (O, \vec{z}) perpendiculaire en O à son plan.

$$\text{Notons : } I_O = \sum_{(S)} \rho^2 \cdot \Delta S$$

Soient x et y les coordonnées du point M . On a : $\rho^2 = x^2 + y^2$

$$\text{On a donc : } I_O = \sum_{(S)} \rho^2 \cdot \Delta S = \sum_{(S)} x^2 \cdot \Delta S + \sum_{(S)} y^2 \cdot \Delta S$$

$$\text{Soit : } \boxed{I_O = I_{Ox} + I_{Oy}}$$

2.4.6.2 Théorème de Huygens

Le moment quadratique d'une section par rapport à un axe contenu dans son plan est égal au moment quadratique de cette section par rapport à un axe parallèle au premier et passant par son barycentre, augmenté du produit de l'aire de la section par le carré de la distance entre les deux axes.

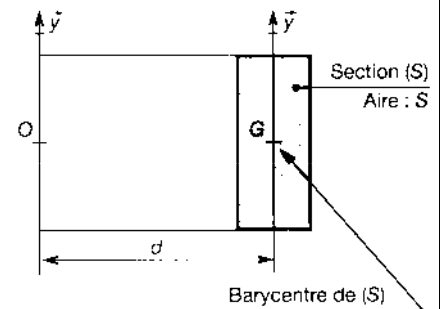
$$\boxed{I_{Oy} = I_{Gy} + S \cdot d^2}$$

I_{Oy} : moment quadratique de (S) par rapport à (O, \vec{y}) (mm^4)

I_{Gy} : moment quadratique de (S) par rapport à (G, \vec{y}) (mm^4)

S : aire de la section (S) (mm^2)

d : distance entre les axes (O, \vec{y}) et (G, \vec{y}) (mm)



Exemple : calculer le moment quadratique de l'équerre de dimensions données dans les schémas ci-dessous :

Décomposer (S) en deux rectangles (1) AKEF et (2) BCDK



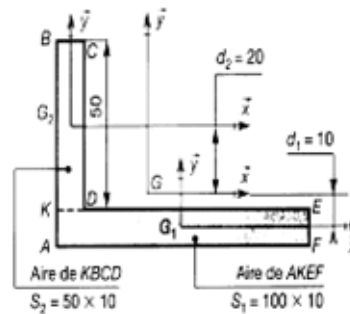
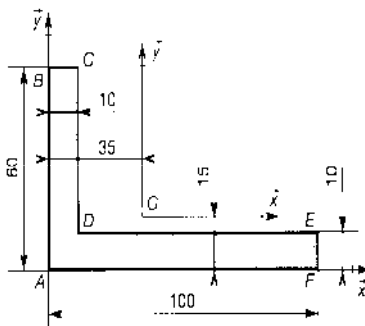
$$I_{1G1x} = \frac{100 \times 10^3}{12} ;$$

$$I_{1Gx} = I_{1G1x} + S_1 \cdot d^2 = \frac{100 \cdot 10^3}{12} + (100 \cdot 10) \cdot 10^2 = \frac{10^5}{12} + 10^5$$

$$I_{2G2x} = \frac{10 \cdot 50^3}{12}$$

$$I_{2Gx} = I_{2G2x} + S_2 \cdot d^2 = \frac{10 \cdot 50^3}{12} + (50 \cdot 10) \cdot 20^2 = \frac{125 \cdot 10^4}{12} + 20 \cdot 10^4$$

$$I_{Gx} = I_{1Gx} + I_{2Gx} = 41,2 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$



2.4.6.3 Moments quadratiques usuels

	I_{Gx}	I_{Gy}	$I_G = I_o$
	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{bh}{12} (b^2 + h^2)$
	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{6}$
	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{32}$
	$\frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$	$\frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$	$\frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$

2.4.7 Module de flexion

On appelle module de flexion la quantité $\frac{IGZ}{Y_{max}}$ en mm^3 . C'est une caractéristique courante des profilés.



2.4.8 Contrainte normale maximale

σ_{\max} = contrainte normale maximale (Mpa)

$\frac{IGZ}{Y_{\max}}$ = module de flexion (mm^3)

Mfz = moment de flexion sur \bar{z} (N.mm)

$$\sigma_{\max} = \frac{Mfz}{\frac{IGZ}{Y_{\max}}}$$

2.4.9 Condition de résistance à la contrainte normale

R_{pe} : contrainte pratique de limite élastique (Mpa) = $\frac{Re}{s}$

Re : contrainte de limite élastique (Mpa)

s : coefficient de sécurité

σ_{\max} = contrainte normale maximale (Mpa)

kt : coefficient de concentration de contrainte

$$kt \cdot \sigma_{\max} \leq R_{pe}$$

2.4.10 Équation de la déformée

Soit une poutre AB sollicitée en flexion simple et $(A, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ un repère d'étude global qui ne se déplace pas lorsque la poutre se déforme.

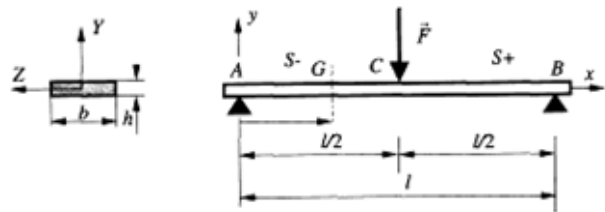
C est la ligne caractéristique de la poutre déformée considérée comme la graphe de la fonction $y=f(x)$

$$y''(x) = \frac{M_{fz}}{E \cdot IGZ}$$

l'équation de la déformée s'obtient par intégration successive de y''

Exemple

$$y''(x) = \frac{M_{fz}}{E \cdot IGZ} = \frac{-F \cdot x}{E \cdot IGZ} = \frac{-F \cdot x}{2 \cdot E \cdot IGZ}$$
$$2 \cdot E \cdot IGZ \cdot y'' = -F \cdot x$$



première intégration

$$2 \cdot E \cdot IGZ \cdot y' = -F \cdot \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$4 \cdot E \cdot IGZ \cdot y' = -F \cdot x^2 + C_1$$

recherche de C_1 : $y' = 0$ pour $x = l/2$ (symétrie de la déformée)

$$0 = -F \cdot \frac{l^2}{4} + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{F \cdot l^2}{4}$$

$$4 \cdot E \cdot IGZ \cdot y' = -F \cdot x^2 + \frac{F \cdot l^2}{4}$$

deuxième intégration :

$$4 \cdot E \cdot IGZ \cdot y = -F \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{F \cdot l^2}{4} \cdot x + C_2 = -\frac{F \cdot x^3}{3} + \frac{F \cdot l^2 \cdot x}{4} + C_2 = \frac{-4 \cdot F \cdot x^3 + 3 \cdot F \cdot l^2 \cdot x}{12} + C_2$$



recherche de C_2 : $y=0$ pour $x = 0$ (appui ponctuel d'axe \bar{y}) donc $C_2=0$

$$y = \frac{-4.F.x^3 + 3.F.l^2.x}{48.E.I_{GZ}} \quad y \text{ est maxi pour } x = l/2 \text{ (symétrie de la déformée)}$$

$$y = \frac{-4.F.\frac{l^3}{8} + 3.F.l^2.\frac{l}{2}}{48.E.I_{GZ}} = \frac{F(-\frac{4l^3}{8} + \frac{3l^3}{2})}{48.E.I_{GZ}} = \frac{F(-\frac{l^3}{2} + \frac{3l^3}{2})}{48.E.I_{GZ}} = \frac{F(\frac{2l^3}{2})}{48.E.I_{GZ}}$$

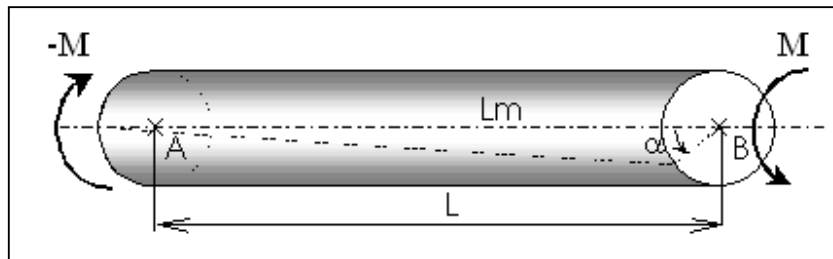
$$y = \frac{F.l^3}{48.E.I_{GZ}}$$

La ligne moyenne après déformation est aussi appelée déformée et la valeur de la déformée en un point est appelée flèche.

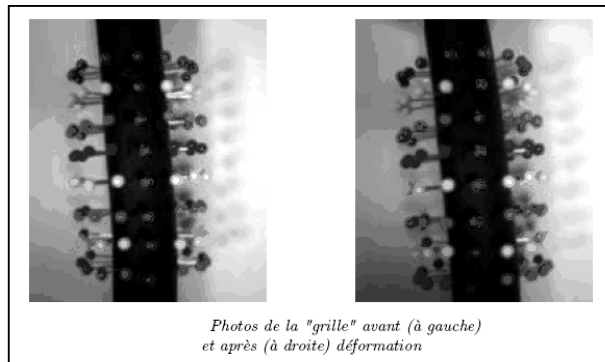
2.5. La torsion simple :

2.5.1 Définitions

Une poutre est sollicitée en torsion lorsque les actions aux extrémités se réduisent à deux moments égaux et opposés, portés par la ligne moyenne L_m .



Etude d'un barreau cylindrique :





Le moment M est appelé moment de torsion, et est noté M_t . Soit α l'angle de rotation entre les deux extrémités de la poutre.

2.5.2 Contrainte tangentielle de torsion :

Soit θ = Erreur != angle unitaire de torsion.

$\tau = G\theta\rho$
 τ : contrainte tangentielle en N/mm²
 G : module d'élasticité transversal en Mpa
 θ : angle unitaire de torsion en rad/mm
 ρ : rayon GM en mm
 $M_t = G\theta I_0$
 M_t : Moment de torsion en N.mm
 G : module d'élasticité transversal en Mpa
 I_0 : moment quadratique par rapport au point G en mm⁴

$$\text{d'où : } \tau = \frac{M_t}{\frac{I_0}{\rho}}$$

2.5.3 Condition de résistance :

Soient :

- ☞ R_{eg} la résistance élastique au cisaillement du matériau (en Mpa)
- ☞ s un coefficient de sécurité ;
- ☞ R_{pg} la résistance pratique au cisaillement, avec $R_{pg} = \frac{R_{eg}}{s}$

$$\tau_{\max} \leq R$$

2.5.4 Déformation

L'angle unitaire de torsion θ est caractéristique de la déformation. Sa méthode de calcul dépend de la géométrie de la section (forme, section ouverte ou fermée, etc...). Ce calcul ne sera pas abordé dans ce cours.

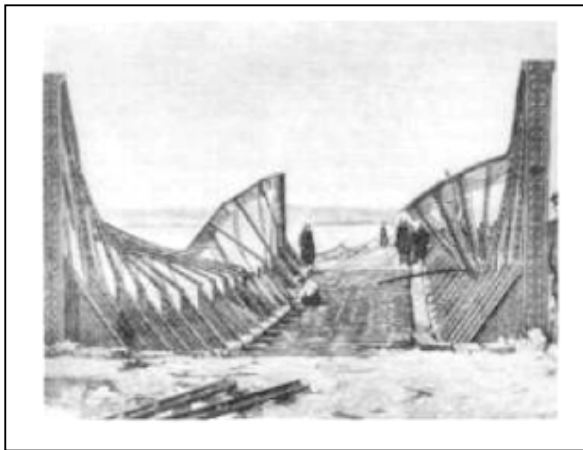
2.6 Le Flambage

2.6.1 Définitions

Le flambage ou flambement d'une poutre est caractérisé par l'apparition brusque d'un changement de forme dans une direction différente de celle des forces de sollicitation. C'est un phénomène qui conduit souvent à la ruine de la structure. À titre d'illustration, on propose quelques exemples ci-dessous :

Sur la figure de gauche, flambement d'ensemble de la membrure supérieure des poutres en treillis d'un pont de chemin de fer

Sur la figure de droite, flambage de rails de chemins de fer par effet thermiques.

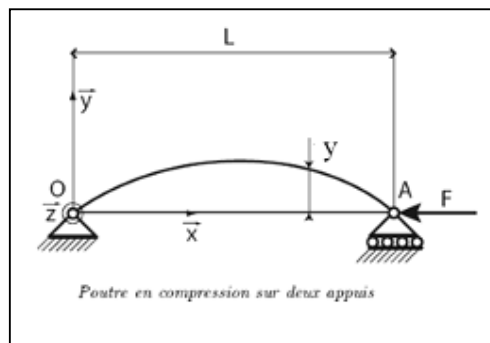
*Flambage de rails*

Si l'on étudie expérimentalement comment varie la flèche transversale d'une poutre comprimée par une force axiale, on obtient, en fonction de la force, une courbe dont l'allure est la suivante : la flèche, d'abord nulle, correspond à la théorie de la compression simple, mais, pour une charge particulière, appelée charge critique, la flèche croît brusquement à la suite d'une instabilité ; c'est le flambement, qui peut entraîner la ruine de la poutre. La solution analytique de ce problème a été donnée notamment par Leonhard Euler en 1750. Le phénomène du flambement est souvent associé à l'effort de compression et il constitue un des critères de dimensionnement des poteaux, des colonnes et des barres comprimées.

2.6.2 Flambage d'Euler :

Pour étudier le flambage, il faut abandonner une des hypothèses fondamentales de la RDM. En effet, la théorie du flambage d'Euler repose sur le fait que lors du flambement de la poutre, on a des déplacements qui ne sont plus petits et ne peuvent donc plus être négligés. Ainsi pour écrire les équations d'équilibre de la poutre, qui permettent de calculer le torseur des efforts intérieurs, on ne peut plus identifier la configuration initiale et la configuration déformée de la poutre. Nous allons donc écrire les équations usuelles issues du Principe Fondamental de la Statique sur la configuration déformée de la poutre. Considérons alors le cas d'une poutre initialement droite soumise à un effort de compression F , et dont les conditions aux limites sont :

- en O, une articulation,
- en A, un appui simple.





ons l'hypothèse qu'il existe une petite flèche y de la poutre (début de flambage), on se retrouve en sollicitation composée (compression + flexion). On peut écrire en flexion :

$$Mf = E \cdot I_G \cdot y''(x)$$

mais le moment de flexion dépend de la charge F et de la flèche y , à savoir :

$$Mf = -F \cdot y(x)$$

On aboutit alors à l'équation différentielle suivante :

$$E \cdot I_G \cdot y''(x) + F \cdot y(x) = 0$$

Mathématiquement on peut donc trouver des solutions de la forme :

$$y(x) = \alpha \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \quad \text{avec } \alpha \text{ constante (flèche de la section médiane)}$$

Cette existence de solution confirme notre hypothèse de départ, à savoir, qu'il peut y avoir déformation (flambage) sous certaines charges dites critiques. Celles-ci dépendent de n et y .

On obtient en remplaçant :

$$F_c = \frac{n \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_G}{L^2} \quad \text{charge critique d'Euler}$$

Prenons la première de celles-ci ($n=1$), trois cas sont à envisager :

- $F_{\text{réel}} < F_c$: La poutre reste droite, elle travaille en compression.
On est en équilibre stable.
- $F_{\text{réel}} = F_c$: C'est l'incertitude, la poutre peut rester droite ou flamber jusqu'à la valeur α . On est en équilibre neutre.
- $F_{\text{réel}} > F_c$: La poutre a de très grandes chances de flamber.
On est en équilibre instable.

Nous venons d'étudier le cas d'une poutre articulée à ses deux extrémités, on pourrait en faire de même avec d'autres types de liaison aux extrémités (libre, encastrement,...) seul la longueur à prendre en compte demeure alors changée.

2.6.3 Contrainte critique.

Nous sommes aussi en compression, on peut donc écrire :

$$\sigma_c = \frac{F_c}{S} = \frac{n \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_G}{S \cdot L^2}$$



On introduit alors le rayon de giration et l'élanement, à savoir :

$$\text{rayon de giration} \quad r = \sqrt{\frac{I_G}{S}} \quad \text{et élanement} \quad \lambda = \frac{L}{r}$$

$$\sigma_C = \frac{n \cdot \pi^2 \cdot E \cdot r^2}{L^2}$$

$$\sigma_C = \frac{n \cdot \pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

Remarque : l'élanement caractérise la flexibilité d'une poutre et permet une comparaison de celles-ci.

2.6.4 Méthodes de calcul. (Poutres en Acier)

2.6.4.1 Méthode Euler - Rankine.

C'est une méthode de calcul simplifiée valable si l'on n'atteint jamais la 1^{ère} charge critique.

On définit les grandeurs suivantes :

- F_{adm} charge admissible
- R_{pc} résistance pratique en compression
- s coefficient de sécurité

$$\lambda_c = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{R_e}} \quad \text{élanement critique}$$

$$\lambda = \frac{L_e}{r} \quad \text{élanement (} L_e \text{: longueur effective, dépend du type d'extrémité)}$$

la relation de base est la suivante : $2 \cdot s = \frac{F_c}{F_{adm}} = \frac{2 \cdot R_e}{R_{pc}}$

on travaille ensuite à l'aide du tableau ci-dessous, suivant l'élanement de la poutre.

Poutres Courtes $\lambda < 20$	Poutres Moyennes $20 \leq \lambda \leq 100$	Poutres Longues $\lambda > 100$
calcul en compression	calcul de Rankine	calcul d'Euler
$F_{adm} = R_{pc} \cdot s$	$F_{adm} = \frac{R_{pc} \cdot s}{1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$	$F_{adm} = \frac{R_{pc} \cdot s}{2 \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$



Note : Le flambage est un calcul avec des applications spécifiques dans la vérification et le dimensionnement des poteaux des structures métalliques.

3. Les Essais

3.1 Essai de traction

3.1.1 Définitions

L'essai de traction permet, à lui seul, de définir les caractéristiques mécaniques courantes des matériaux. Les résultats issus de cet essai, permettent de prévoir le comportement d'une pièce sollicitée en Cisaillement, Traction / Compression et Flexion.

Il consiste à exercer sur une éprouvette normalisée (pièce de dimensions normalisées fabriquée dans le matériau à tester), cylindrique ou parallélépipédique (plate), deux actions mécaniques et opposées qui vont la déformer progressivement puis la rompre



Machine de traction

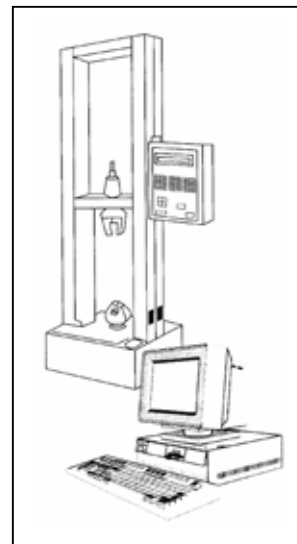
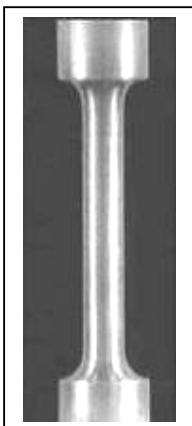


Schéma d'un machine de traction



Éprouvette

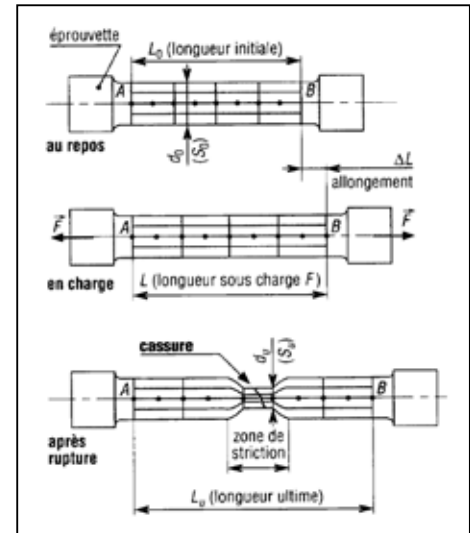
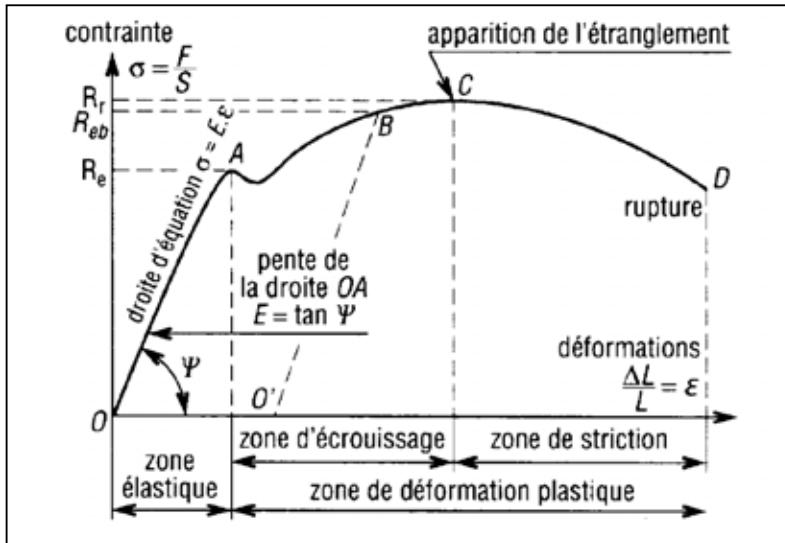


Éprouvette installée entre les mors de machine de traction



3.1.2 Courbes de contraintes et déformation

Pour un grand nombre de matériaux, comme les alliages, les courbes obtenues présentent une zone, appelée domaine élastique où le graphe est une droite (segment OA). Pour tous les points de cette droite, la déformation (ou l'allongement) est proportionnelle à la contrainte et le matériau est élastique.



3.1.3 Module d'élasticité longitudinale E (N/mm²) ou Mpa

Il caractérise la pente de la droite de proportionnalité précédente et l'élasticité du matériau testé. Plus E est grand, plus le matériau est rigide et inversement.

Matériau	Fontes	Aciers	Cuivre	Aluminium	Tungstène
E (MPa)	60000 à 160000	200000	120000	70000	400000

3.1.4 Loi de Hooke

$$\sigma = E \frac{\Delta l}{l} = E \cdot \epsilon$$

Cette loi, ou équation de la droite OA, traduit la proportionnalité : σ en MPa, E en MPa et ϵ sans unité).

Unités : **σ en Mpa** ; contrainte de traction
E en Mpa ; module d'élasticité longitudinale
 ϵ sans unité ; allongement élastique unitaire



3.1.5 Déformations élastiques

Le comportement, des aciers donné par la courbe de traction, a permis pour différents matériaux d'établir la relation :

$$\frac{N}{S} = E \frac{\Delta l}{l} ; \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \text{ est l'allongement élastique unitaire suivant } x$$

Unités : N en Newton
S en mm²
E en MPa (N/mm²)
Δl et l en mm.

Lors de cet essai, on met aussi en évidence une autre caractéristique de l'élasticité ; il existe un rapport constant entre la contraction relative transversale (Δd / d) et l'allongement relatif longitudinal (Δl / l).

On peut écrire :

$$\frac{\Delta d}{d} = \nu \frac{\Delta l}{l}$$

Unités : ν sans unité
d et l en mm.

ν est aussi une caractéristique du matériau (**coefficient de Poisson**), il est de l'ordre de 0,3 pour les métaux.

3.1.6 Limite élastique Re (Mpa)

Elle marque la fin du domaine élastique (au point A). Pour les valeurs supérieures le matériau ne se déforme plus élastiquement mais plastiquement (l'éprouvette ne retrouve plus ses dimensions initiales après "déchargement", il subsiste un allongement permanent).

3.1.7 Limite conventionnelle d'élasticité Re 0,2 MPa

On utilise cette détermination pour les courbes de traction où le palier de fin de limite élastique n'apparaît pas nettement. Pour la mesure de Re on tolère une légère déformation permanente de 0,2% (A% = 0,2).

3.1.8 Limite maximale Rm (Mpa)

C'est la contrainte maximale que peut supporter le matériau avant d'atteindre la zone de striction. Utilisé dans le calcul des organes de sécurité. Souvent appelée résistance à la rupture.

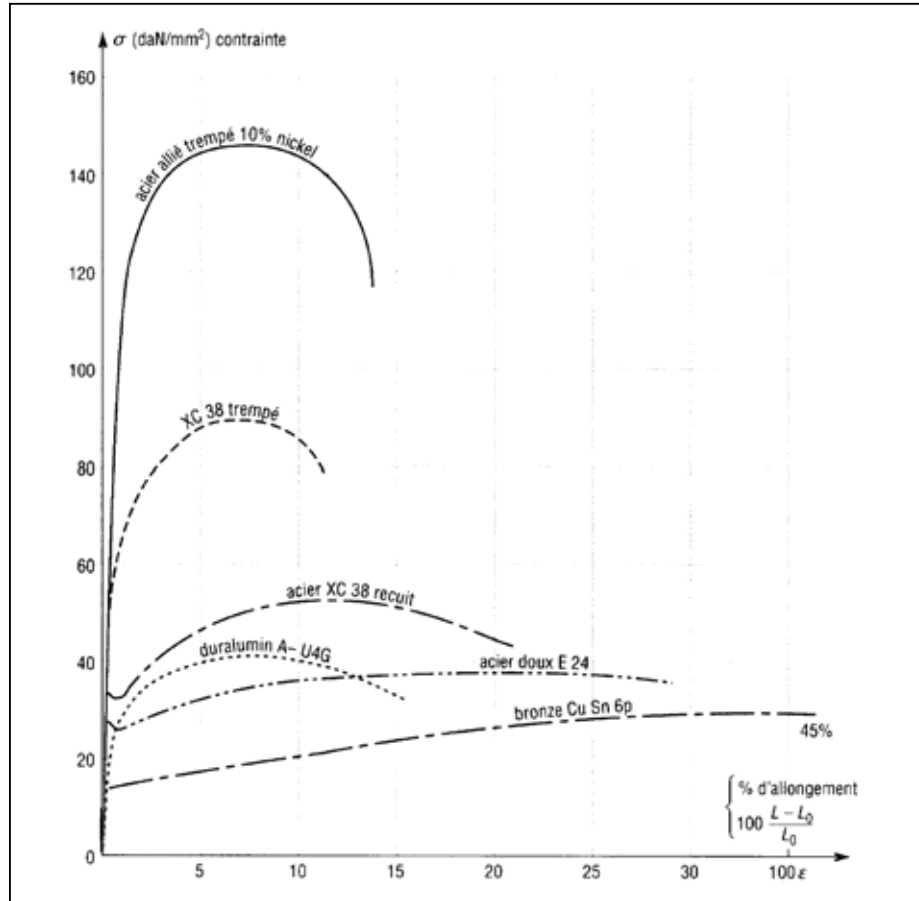
3.1.9 Phénomène d'écrouissage

Surtout employé en compression, il permet d'augmenter la limite élastique Re sans modifier la résistance à la rupture Rr. Dans un premier temps le matériau est déformé plastiquement avant point de striction, chemin OB. Au relâchement le "déchargement" se fait suivant la droite BO' parallèle à OA. Après remise en charge, la nouvelle courbe caractéristique du matériau est devenu O'BC avec Reb comme nouvelle limite élastique.



3.1.10 Courbes de traction de divers matériaux

Voir ci contre



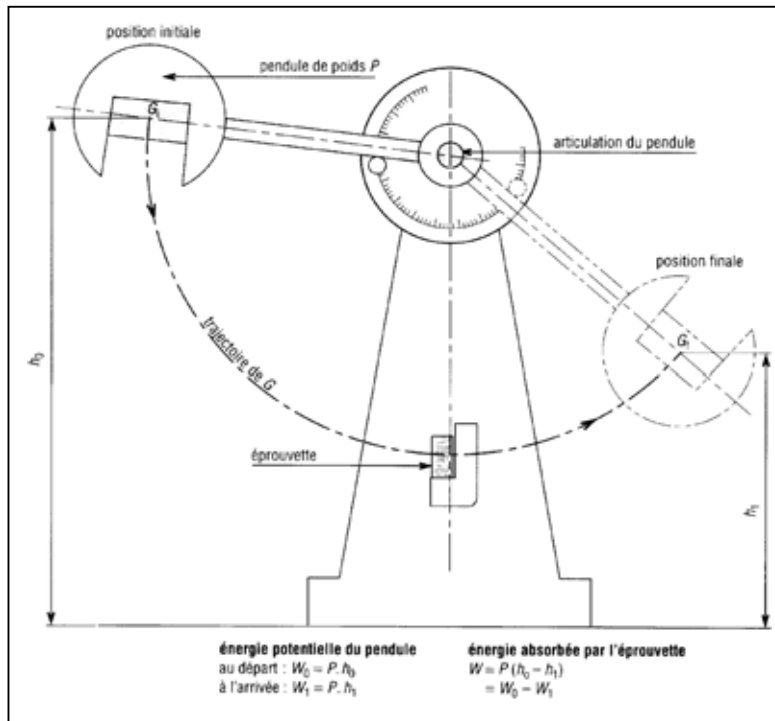
3.2 Essai de résilience

La résilience, de symbole général K , caractérise la capacité d'un matériau à absorber les chocs sans se rompre. Ce risque est amplifié aux basses températures. Elle est mesurée sur des machines du type Charpy (éprouvette sur deux appuis) ou Izod (éprouvette encastrée).

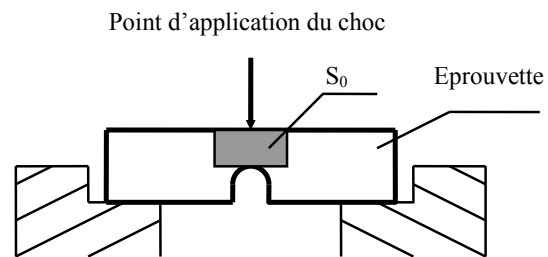
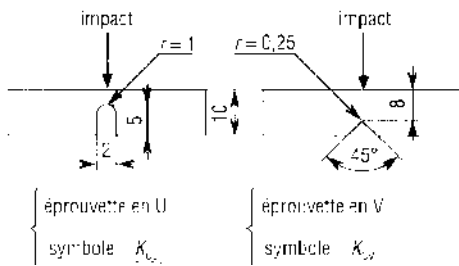
L'essai, qui est un essai **comparatif** entre matériaux, mesure l'énergie qu'il faut fournir à un pendule pesant pour briser une éprouvette entaillée du matériau à tester.

L'énergie absorbée par l'éprouvette (W) est égale à la différence des énergies potentielles du pendule entre le début ($W_0 = P \cdot h_0$) et l'arrivée ($W_1 = P \cdot h_1$); $W = P \cdot h_0 - P \cdot h_1 = P (h_0 - h_1)$

La résilience est égale au rapport de W sur l'aire de la section au droit de l'entaille.



Deux cas : K_{cu} ou $K_{cv} = \frac{W_0 - W_1}{S_0}$



3.3 Essai de dureté

La dureté, de symbole général H, caractérise la capacité d'un matériau à résister au marquage (empreintes, rayures. . .), à l'usure et à l'érosion.

Elle peut être évaluée en mesurant une empreinte laissée en surface par un poinçon agissant sous l'action d'une force connue (essais Brinell, Vickers et Rockwell) mais aussi par une hauteur de rebondissement d'un objet très dur sur la surface à tester (essai Shore pour élastomères et plastiques).

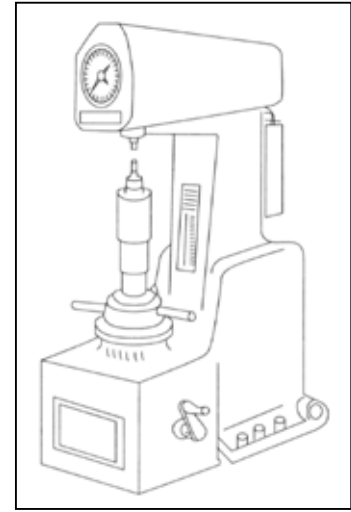
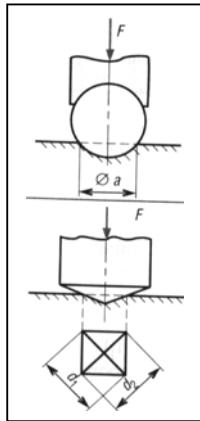


3.

3.1 Dureté Brinell (symbole HB)

Elle est obtenue par calcul. Après essai, on mesure l'empreinte laissée par une bille polie (diamètre : 1-2,5-5-10 mm) et la valeur de la charge F appliquée pour obtenir cette empreinte (essai usuel : F = 3 000 daN, d = 10 mm, pendant 15 à 60 secondes). Utilisation : tous métaux.

$$HB = \frac{F}{10\pi \left(5 - \sqrt{25 - \frac{d^2}{4}} \right)}$$



3.3.2 Dureté Vickers (symbole HV)

Elle est obtenue par calcul ; le principe est identique au précédent mais avec une pyramide droite en diamant à base carrée dont l'angle au sommet est de 136°. Utilisation : tous métaux.

$$HV = \frac{0,189 \times F}{d^2} \text{ tel que } d = d_1 + d_2$$

Variante : essai Knoop (microdureté, empreinte en forme de losange, matériaux durs pour petites pièces et pièces à sections fines).

3.3.3 Dureté Rockwell (symbole HR)

C'est l'essai de dureté le plus connu mondialement. Dans ce cas, la dureté, contrairement à Brinell et Vickers, est obtenue par lecture directe d'une longueur d'enfoncement d'un pénétrateur bille acier ou cône diamant

Une précharge (F_0) permet de faire une empreinte initiale et, par-là, d'éliminer les incertitudes propres aux défauts de la surface

**3.4 Caractéristiques de quelques matériaux****Aciers d'usage général**

Nuances	Rr (MPa)	Re (MPa)	E (MPa)
S 185 (A33)	290	185	190000
S 235 (E24)	340	235	190000
S 275 (E28)	410	275	190000
S 355 (E36)	490	355	190000

Aciers de construction mécanique

Nuances	Rr (MPa)	Re (MPa)	E (MPa)
E 295 (A50)	470	295	200000
E 335 (A60)	570	335	200000
E 360 (A70)	670	360	200000

Aciers pour traitements thermiques

Nuances	Rr (MPa)	Re (MPa)	E (MPa)
C 22 (XC 18)	410 à 980	255 à 600	210000
C 25 (XC 25)	460 à 690	285 à 370	210000
C 35 (XC 38)	570 à 830	335 à 490	210000
C 40 (XC 42)	620 à 880	355 à 520	210000
C 45 (XC 48)	660 à 930	375 à 580	210000
C 50 (XC 50)	700 à 980	395 à 600	210000

Aciers faiblement alliés

<i>Nuances</i>	Rr (MPa)	Re (MPa)	E (MPa)
48 Cr 2 (38 C 2)	600 à 900	350 à 550	210000
100 Cr 6 (100 C6)	850 à 1250	550 à 850	210000
13 Ni Cr 14 (14 NC 11)	800 à 1450	650 à 900	210000
20 Ni Cr Mo 7 (18 NCD 6)	800 à 1500	700 à 900	210000
36 Ni Cr Mo 16 (35 NCD 16)	1000 à 1750	800 à 1250	210000
34 Cr Mo 4 (35 CD 4)	700 à 1200	500 à 850	210000

Aciers fortement alliés

Nuances	Rr (MPa)	Re (MPa)	E (MPa)
X 2 Cr Ni 19.11 (Z3 CN 19-11)	440 à 640	185	
X 6 Cr Ti 18.10 (Z6 CNT 18-10)	490 à 690	205	



4. Exercices :

4.1 Problème de traction

Une diagonale d'une ferme métallique de longueur $L = 4$ m, fabriqué d'une cornière à ailes égales, doit supporter un effort axial de traction $F = 10^5$ N.

Calculer :

1 – La section nécessaire pour que la diagonale résiste en pleine sécurité

2.- Son allongement total ΔL .

Caractéristiques de l'acier : La résistance à la rupture du matériaux est $R = 550$ N/mm²

Module d'élasticité longitudinal : $E = 2 \times 10^5$ N/mm²

Coefficient de sécurité : $s = 5$ par rapport à R

On ne tient pas compte du poids propre du tirant.

SOLUTION :

Données : Charge : $F = 10^5$ N, axiale.

Matériau : $R = 550$ N/mm², $E = 2 \times 10^5$ N/mm²

Coefficient de sécurité : $s = 5$ par rapport à R

1. Calcul du diamètre.

Appliquons l'équation de contrainte : $\sigma = \frac{F}{S}$ d'où $S = \frac{F}{\sigma}$ (1)

F et σ étant constants, S doit l'être également.

On a choisi: $s = 5$ or $s = \frac{R}{\sigma}$ d'où $\sigma = \frac{R}{s} = \frac{550}{5} = 110 \frac{N}{mm^2}$ (2)

De (1) et (2) on tire : $S = \frac{F}{R} \times s$

Application numérique :

Unité F en N ; L en mm ; $F = 10^5$ N, axiale ; $R = 550$ N/mm², $s = 5$

$S = \frac{10^5}{550} \times 5 = 909,1 mm^2$ ou $9,09$ cm². Résulte d'abaque une cornière à aile égales L 70x70x7 avec $S = 9,4$ cm²

2. Calcul de l'allongement.

Appliquons l'équation de déformation: $\Delta L = \frac{N}{S} \times \frac{L}{E}$

Soit ici: $\Delta L = \frac{F}{S_1} \times \frac{L}{E}$ $S_1 = 9,4$ cm² section adoptée.

Module d'élasticité longitudinal : $E = 2 \times 10^5$ N/mm²

Application numérique :



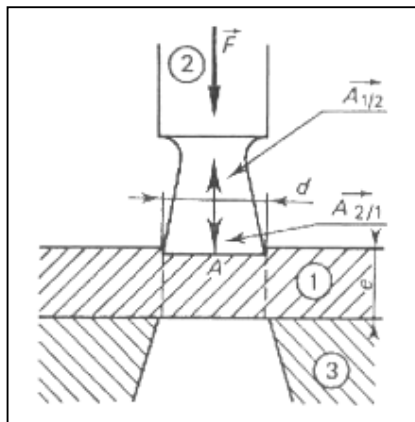
$$\Delta L = \frac{F}{S_1} \times \frac{L}{E} = \frac{10^5}{940} \times \frac{4 \times 10^3}{2 \times 10^5} = 2,13 \text{ mm}$$

Contrainte normale réelle:

$$\sigma_{réelle} = \frac{F}{S_1} = \frac{10^5}{940} = 106,4 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

4.2 Problème de cisailage (poinçonnage)

Pour découper un trou cylindrique de diamètre d dans une tôle [1], on utilise un outil [2] appelé poinçon. La tôle [1] est placée entre le poinçon [2] soumis à l'action F d'une presse et le bâti [3] de celle-ci. Soit à découper une tôle en acier doux, dont la résistance à la rupture au glissement est R_g avec un poinçon (en acier traité très dur) dont la résistance de rupture à la compression est R' . On conçoit que si l'épaisseur e de la tôle à découper dépasse une certaine valeur, le poinçon sera mis hors d'usage, d'où le problème.



1. Établir la relation entre d , e et les caractéristiques des deux matériaux (poinçon et tôle) pour que le poinçon ne soit pas détérioré.

(On prendra un coefficient de sécurité $s = 2,5$ par rapport à R' du poinçon.)

2. Pour un poinçon $d = 30 \text{ mm}$, en acier $R' = 100 \text{ daN/mm}^2$, quelle épaisseur de tôle en acier $R_g = 50 \text{ daN/mm}^2$, peut-on découper?

SOLUTION :

1. Relation entre d , e , R_g et R' .

La section à poinçonner est la surface latérale du cylindre du trou, de diamètre d , soit : πde ; tôle R_g . F étant la force de poinçonnage, on doit donc avoir :

$$F \geq \pi de \times R_g \quad [1]$$

La surface de contact entre poinçon et tôle est : $\frac{\pi d^2}{4}$

Il faut que la pression exercée par la tôle sur le poinçon soit inférieure à $\frac{R'}{s}$, (résistance de celui-ci à la compression R' , divisé par s coefficient de sécurité)



$$\text{Soit : } \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4}} \leq \frac{R'}{s} \text{ ou } F \leq \frac{\pi d^2}{4} \times \frac{R'}{s} \quad [2]$$

Eliminons F entre [1] et [2], il vient :

$$\pi d e R_g \leq \frac{\pi d^2}{4} \times \frac{R'}{s}$$

$$\text{D'où : } e \leq \frac{d R'}{4 s R_g}$$

2. Épaisseur e de tôle à poinçonner. Application numérique (mm, N)

3. Application numérique :
$$e \leq \frac{d R'}{4 s R_g}$$

$$d = 30 \text{ mm} ; R' = 1000 \text{ N/mm}^2 ; s = 2,5 ; R_g = 500 \text{ N/mm}^2$$

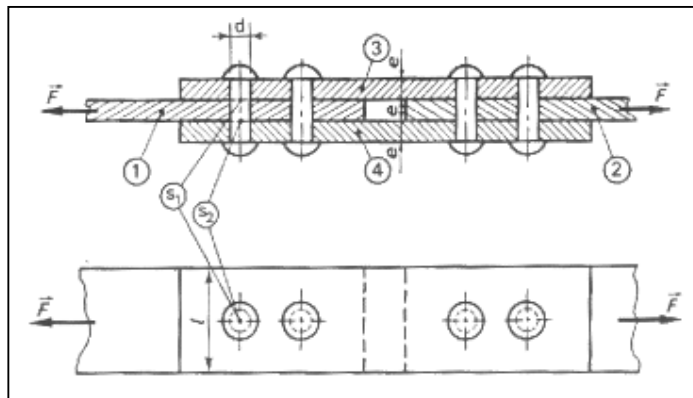
$$e \leq \frac{30 \times 1000}{4 \times 2,5 \times 500} ; e \leq 6 \text{ mm}$$

$$\text{Soit : } \frac{e}{d} \leq \frac{6}{30} ; \quad \frac{e}{d} \leq \frac{1}{5}$$

REMARQUE En tenant compte du frottement du poinçon sur la tôle, on trouve un rapport $\frac{e}{d}$ plus petit que ce résultat théorique.

4.3 Problème de cisailage des rivets

Deux plaques de tôle [1] et [2], d'épaisseur e , sont raccordées par des couvre-joints [3] et [4] de même épaisseur. La liaison est assurée par des rivets. L'ensemble est soumis à une sollicitation de traction F



Le diamètre d des rivets est défini en fonction de e , par la formule semi-expérimentale:



$$d = \frac{45 \times e}{15 + e} \quad (e \text{ et } d \text{ en mm})$$

Calculer le nombre total n de rivets nécessaires pour assurer la liaison.
On donne la contrainte pratique au cisaillement R_{pg} .

Application numérique :

$$F = 12000 \text{ daN ou } 12 \times 10^4 \text{ N}$$

$$e = 12 \text{ mm}$$

$$R_{pg} = 100 \text{ N/mm}^2.$$

SOLUTION :

$$\text{Diamètre des rivets : } d = \frac{45 \times 12}{15 + 12} = 20 \text{ mm.}$$

En faisant l'isolement de la tôle [1], par exemple, on voit (le frottement étant négligé) qu'il y a $\frac{n}{2}$ rivets sollicités au cisaillement, mais chacun présente deux sections au cisaillement (s_1 et s_2)

L'équation d'équilibre de [1] est donc :

$$F = \frac{n}{2} \times 2 \times \frac{\pi d^2}{4} \times R_{pg}$$

D'où

$$n = \frac{4F}{\pi d^2 R_{pg}}$$

Application numérique (mm et N) :

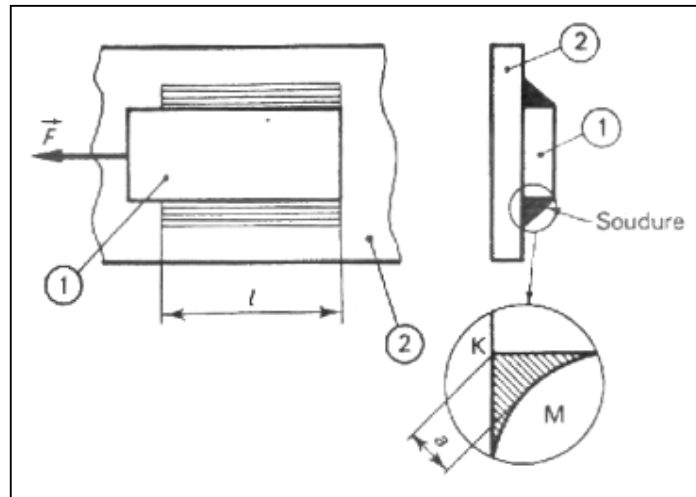
$$n = \frac{4 \times 12 \times 10^4}{\pi \times 20^2 \times 100} = \frac{12}{\pi} \approx 3,82 \quad n = 4 \text{ (plus petit entier pair supérieur)}$$

Nombre pair : parce qu'on calcule $\frac{n}{2}$ avec rivets appliqués à la tôle isolée.

4.4 Problème de cisailage des soudures

Un fer plat de charpente métallique est soudé sur une pièce d'assemblage [2] (gousset) par deux cordons de soudure d'angle.

Déterminer la longueur l à donner aux cordons pour que la liaison entre [1] et [2], soumise à l'action de F , corresponde à la résistance pratique imposée.



Application numérique :

Résistance pratique admise au cisaillement de la soudure

$$R_{pg} = 0,65 R_e ; R_e = 240 \text{ N/mm}^2 ; F = 2 \times 10^4 \text{ N} ; a = 5 \text{ mm}.$$

SOLUTION :

L'équilibre du fer plat [1] montre que les deux cordons de soudure sont sollicités au cisaillement suivant la section minimale correspondant à l'épaisseur a, sous l'action de F.

On doit donc avoir :

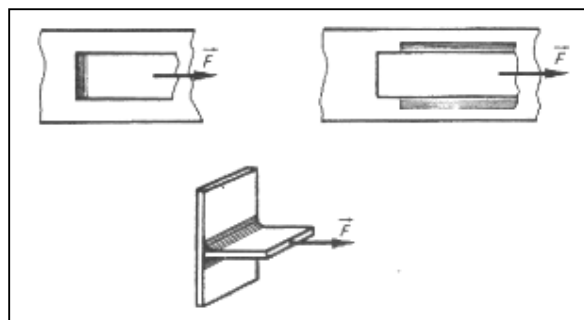
$$l \geq \frac{F}{2a \times 0,65 R_e} ; l \geq \frac{F}{1,3 \times a \times R_e}$$

Application numérique (mm, N)

$$l \geq \frac{2 \times 10^4}{1,3 \times 5 \times 240} = 12,82 \text{ mm} \quad l = 13 \text{ mm}$$

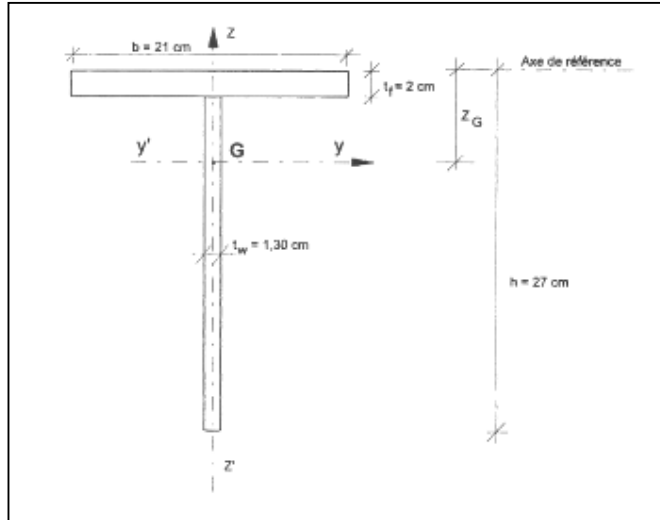
REMARQUE : Des règlements officiels donnent des coefficients correcteurs de sécurité à appliquer en fonction, notamment, de l'épaisseur a du cordon de soudure, de la position du cordon par rapport à la sollicitation

Il faut donc s'y référer pour des calculs relatifs à une construction réelle.



**4.5 Problème de calcul des caractéristiques de la section**

Pour la section représentée ci-dessous, déterminer:



- L'aire A de la section.
- La position du centre de gravité.
- Les moments d'inertie I_y , et I_z par rapport aux axes principaux.
- Les modules de résistance élastique $W_{el,y}$ et $W_{el,z}$
- Les rayons de giration i_y et i_z .

SOLUTION :

a) Aire de la section

$$A = b \times t_f + (h - t_f) \times t_w = 21,0 \times 2,0 + (27,0 - 2,0) \times 1,30 = 74,50 \text{ cm}^2$$

b) Position du centre de gravité

Le centre de gravité G est situé sur l'axe de symétrie zz' . Pour déterminer sa position sur cet axe, nous allons calculer le moment statique S_0 de la section complète par rapport à l'axe de référence passant par le bord extérieur de la semelle.

	Aire A (cm ²)	Bras de levier (cm)	Moment statique (cm ³)
Semelle	21,0 × 2,0	$\frac{2,0}{2}$	42,0
Ame	(27,0 - 2,0) × 1,30	$2,0 + \left(\frac{27,0 - 2,0}{2}\right)$	471,25
Total	74,50		S₀ = 513,25



La distance Z_G entre le centre de gravité et l'axe de référence est donnée par:

$$Z_G = \frac{S_0}{A} = \frac{513,25}{74,5} = 6,89 \text{ cm}$$

c) Moment d'inertie I_y
$$I_y = \sum I_{propre} + \sum Ad^2$$

	I propre (cm ⁴)	Ad ² (cm ⁴)	I _y (cm ⁴)
Semelle	$\frac{21,0 \times 2,0^3}{12}$	$2,0 \times 21,0 \times \left(6,89 - \frac{2,0}{2}\right)^2$	1 471,1
Ame	$\frac{(27,0 - 2,0)^3 \times 1,30}{12}$	$(27,0 - 2,0) \times 1,30 \times \left[2,0 + \left(\frac{27,0 - 2,0}{2}\right) - 6,89\right]^2$	3 574,9
Total			5 046

Moment d'inertie I_z

	I propre (cm ⁴)	Ad ² (cm ⁴)	I _z (cm ⁴)
Semelle	$\frac{21,0^3 \times 2,0}{12}$	0	1 543,50
Ame	$\frac{1,30^3 \times (27,0 - 2,0)}{12}$	0	4,58
Total			1 548

Les inerties par rapport aux axes principaux ont donc pour valeurs:

$$I_y = 5046 \text{ cm}^4$$

$$I_z = 1548 \text{ cm}^4$$

d) Modules de résistance élastique
axe y:

$$v_1 = Z_G = 6,89 \text{ cm}$$

$$v_2 = h - Z_G = 27,0 - 6,89 = 20,11 \text{ cm}$$

$$W_{el,y1} = \frac{I_y}{v_1} = \frac{5046}{6,89} = 732,4 \text{ cm}^3$$

$$W_{el,y2} = \frac{I_y}{v_2} = \frac{5046}{20,11} = 250,9 \text{ cm}^3$$



Le module de résistance élastique $W_{el,y}$ est égal à la plus faible de ces deux valeurs, donc: $W_{el,y} = 250,9 \text{ cm}^3$.

$$\text{axe } z: \quad v_3 = \frac{21,0}{2} = 10,5 \text{ cm}$$

$$W_{el,z} = \frac{I_y}{v_3} = \frac{1548}{10,5} = 147,5 \text{ cm}^3$$

e) Rayons de giration

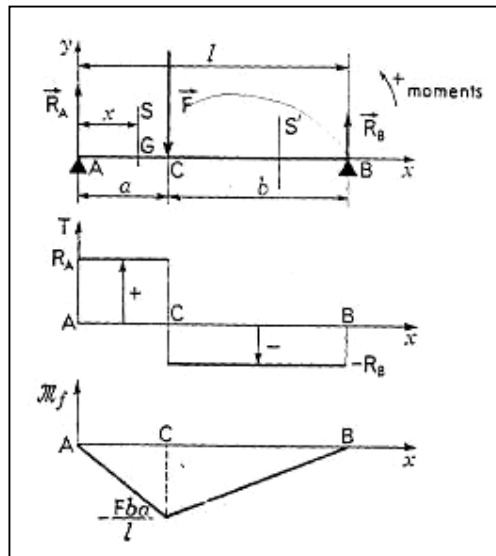
$$\text{axe } y: \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{5046}{74,5}} = 8,23 \text{ cm}$$

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{1548}{74,5}} = 4,56 \text{ cm}$$

4.6 Problème de flexion. Poutres sur deux appuis de niveau. Charges localisées.

Pour le schéma statique ci-dessous :

- Calculer les réactions aux appuis
- Tracer le diagramme d'effort tranchant
- Rechercher la valeur maximale du moment de flexion



Les forces appliquées à la poutre sont :

- Son poids. (négligé),
- F connue,
- R_A , et R_B d'intensités inconnues.

Pour calculer les réactions d'appui il suffit d'écrire les équations d'équilibre :

$$\begin{array}{c} \rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow \\ F + R_A + R_B = 0 \end{array}$$

soit, par projection sur Ay : $-F + R_A + R_B = 0$



En exprimant les moments en A et en projetant sur Az (Axyz trirectangle direct), la deuxième condition d'équilibre donne :

$$-Fa + R_B l = 0$$

Soit : $R_B = \frac{F \times a}{l}$

puis $R_A = \frac{F \times b}{l}$ en exprimant les moments en B

→

Diagramme des T :

La force F sépare la poutre en deux régions AC et CB.

Entre A et C (section S) : $T = R_A$

Entre C et B (section S') : $T = R_A - F = -R_B$. La variation de T est représentée par le diagramme d'effort tranchant. En C il y a discontinuité pour T.

Diagramme des M_f :

Entre A et C : $M_f = R_A x$

En A, $M_f = 0$

En C, $M_f = \frac{-F \times b}{l} \times a$

Entre C et B : $M_f = -R_A x + F(x-a)$

$$M_f = x(F - R_A) - Fa = x R_B - Fa = \frac{F \times a}{l} \times x - Fa$$

en B : $M_f = 0$.

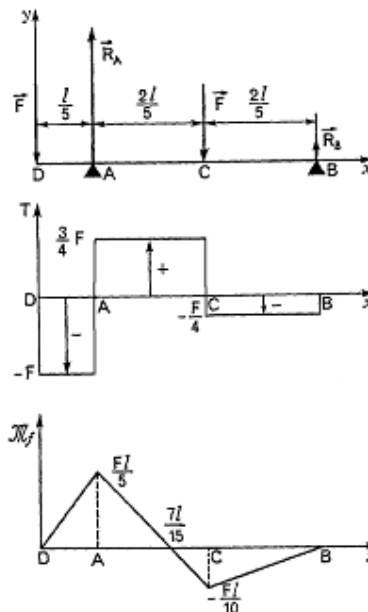
La variation de M_f est représentée par le diagramme de moments fléchissant.

Remarquons que $M_{f \max} = \frac{-F \times b}{l} \times a$

4.7 Problème de flexion. Poutre avec porte à faux. Charges localisées.

Pour le schéma statique ci-dessous :

- Calculer les réactions aux appuis
- Tracer le diagramme d'effort tranchant
- Rechercher la valeur maximale du moment de flexion





Les forces appliquées à la poutre sont :

- Son poids. (négligé),
- F connue,
- R_A , et R_B d'intensités inconnues.

Pour calculer les réactions d'appui il suffit d'écrire les équations d'équilibre :

$$\begin{array}{ccc} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ 2F + R_A + R_B & = & 0 \end{array}$$

soit, par projection sur Dy: $-2F + R_A + R_B = 0$.

En exprimant les moments en A et en projetant sur Az (Azyz trirectangle direct), la deuxième condition d'équilibre donne :

$$F \times \frac{l}{5} - F \times \frac{2l}{5} + R_B \times \frac{4l}{5} = 0$$

Soit : $R_B = \frac{F}{4}$

puis $F \times l - R_A \times \frac{4l}{5} + F \times \frac{2l}{5} = 0$

$$R_A = \frac{7 \times F}{4} \text{ en exprimant les moments en B}$$

Diagramme des T

Entre D et A: $T = -F$

Entre A et C : $T = -F + R_A = \frac{3F}{4}$

Entre C et B : $T = -F + R_A - F = -\frac{F}{4}$

Diagramme des M_f :

Entre D et A : $M_f = Fx$

En A : $M_f = \frac{Fl}{5}$

Entre A et C : $M_f = Fx - R_A \times \left(x - \frac{l}{5}\right) = (F - R_A)x + R_A \frac{l}{5}$

$$M_f = -\frac{3}{4}Fx + \frac{7Fl}{20}$$

En C : $M_f = -\frac{Fl}{10}$ par ailleurs, $M_f = 0$ pour $x = \frac{7l}{15}$

Entre C et B $M_f = Fx - R_A \times \left(x - \frac{l}{5}\right) + F \left(x - \frac{3l}{5}\right)$

soit, après réduction : $M_f = \frac{F}{4}x - \frac{Fl}{4}$

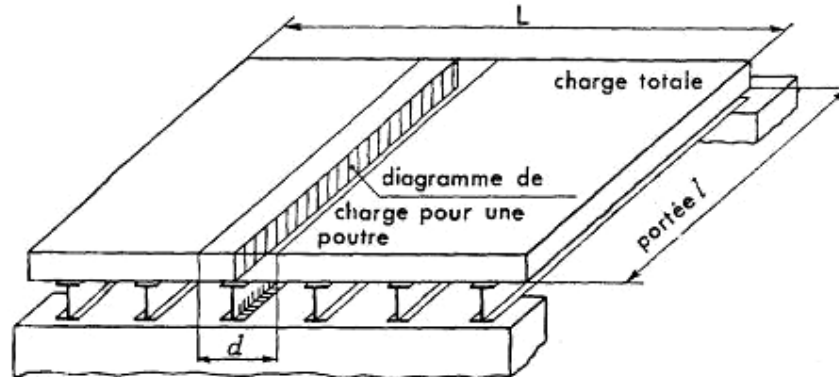
En B : $M_f = 0$.



Charges réparties. - Préliminaire. - Comme exemples de charges réparties, on peut citer : le poids propre des poutres, les charges généralement supportées par un tablier de pont, un plancher, une toiture, la caisse d'un véhicule.

Mise en évidence de la charge unitaire q (N/m).

Dans l'exemple représenté par la figure ci-dessous, la charge est uniformément répartie sur six poutres



parallèles (profilés en I). Si p est le poids unitaire de la charge en N/m^2 , la charge totale a pour expression

$$F = pLl.$$

La charge supportée par une poutre. est alors $Q = pdl$, ce qui permet de mettre en évidence une charge unitaire ou taux de charge :

$$q = Q/l \text{ en } N/m$$

Le diagramme de cette charge uniforme est représenté sur la figure ci-dessous

4.8 Problème de flexion. Poutre sur deux appuis de niveau. Charge uniformément répartie.

Pour le schéma statique ci-dessous :

- Calculer les réactions aux appuis
- Tracer le diagramme d'effort tranchant
- Rechercher la valeur maximale du moment de flexion

Les forces appliquées à la poutre sont :

- Son poids. (négligé),
- P connue, $P = ql$ (q , poids unitaire en N/m)
- R_A , et R_B d'intensités inconnues.

Pour calculer les réactions d'appui il suffit d'écrire les équations d'équilibre :

$$\begin{array}{c} \rightarrow \rightarrow \rightarrow \\ P + R_A + R_B = 0 \end{array}$$

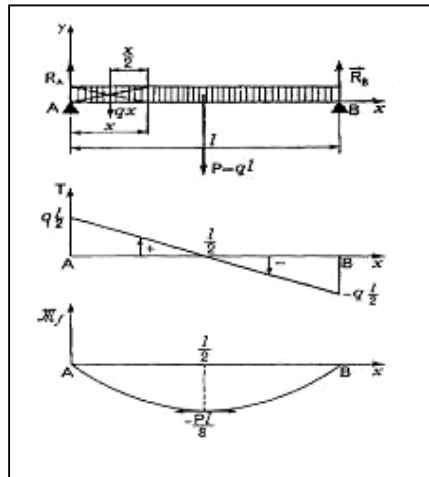
soit, par projection sur Ay : $-P + R_A + R_B = 0$.

Actions de contact en A et B .

- Par symétrie $R_A = R_B = \frac{ql}{2}$

Diagramme des T :

Entre A et B : $T = R_A - qx$ ou $T = \frac{ql}{2} - qx$



La variation de T est du premier degré figure ci-dessus et $T = 0$ pour $x = l/2$

Diagramme des M_f

$$\text{Entre A et B } M_f = -R_A x + \frac{q \times x \times x}{2} = -\frac{q \times l}{2} \times x + \frac{q \times x^2}{2}$$

La variation de M_f est du deuxième degré (arc de parabole représenté par la troisième partie de la figure ci-dessus).

$$\text{Pour } x = \frac{l}{2} : M_{fmax} = -\frac{P \times l}{8} = -\frac{q \times l^2}{8}$$

4.9 Problème de flexion. Poutres encastrées à une extrémité.

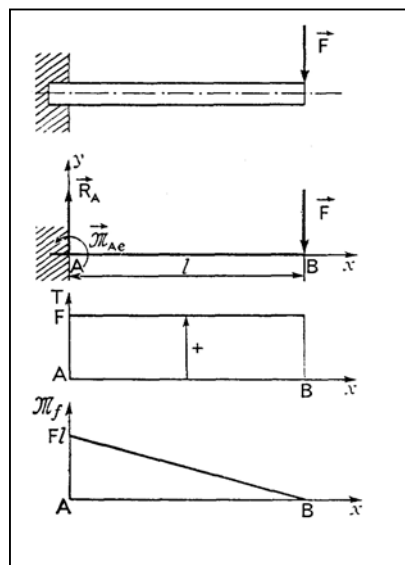
Pour le schéma statique ci-dessous :

- Calculer les réactions aux appuis
- Tracer le diagramme d'effort tranchant
- Rechercher la valeur maximale du moment de flexion

Les forces appliquées à la poutre sont :

- Son poids. (négligé),
- F connue
- R_A , et M_A d'intensités inconnues.

- a) Charges localisées :





Actions de l'encastrement :

- Équilibre de la poutre (poids négligé)
- la condition $\Sigma \vec{F}_{ext} = 0$ donne, par projection sur Ay :
- $F + R_A = 0$ ou $R_A = F$

- la condition $\Sigma \vec{M}_A = 0$ donne, par projection sur Az .
- $F l + M_{AZ(enc)} = 0$

Diagramme des T

Entre A et B : $T = R_A = F$.

Diagramme des M_f :

$$M_f = M_{enc.} - Fx$$

$$M_f = F l - Fx$$

$$M_f = F l$$

b) Charges réparties uniformément.

Les forces appliquées à la poutre sont :

- Son poids. (négligé),
- Q connue, $Q = ql$ (q , poids unitaire en N/m)
- R_A , et M_A d'intensités inconnues.

Actions de l'encastrement

$$R_A = ql$$

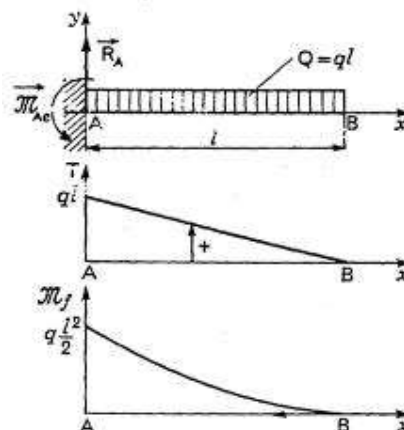
$$M_{Aze} = ql^2/2$$

Diagramme des T . : - Entre A et B : $T = R_A - qx = ql - qx$.

Diagramme des M_f :

$$M_f = ql^2/2 - R_A x + qx^2/2 = qx^2/2 - qlx + ql^2/2$$

La valeur maximale est obtenue pour $x=0$; $M_f = ql^2/2$





VECTEURS

OBJECTIFS

- Définir les notions de scalaire et de vecteur.
- Décrire les principales opérations réalisées sur les vecteurs, les coordonnées cartésiennes d'un vecteur et la notion de vecteur-position.
- Définir le produit scalaire et le produit vectoriel de deux vecteurs.

En mécanique, les vecteurs sont utilisés pour représenter les forces $(\vec{F}, \vec{A}_{O/I})$, les moments $(\vec{M}, \vec{M}_O(\vec{F}))$
 les vitesses $(\vec{V}, \vec{V}_{A1/0})$, les accélérations $(\vec{a}, \vec{a}_{A1/0})$, les contraintes $(\vec{\sigma}, \vec{\tau})$, etc.

I - Scalaires

Les scalaires sont des nombres positifs, négatifs ou nuls, utilisés pour représenter des quantités diverses temps, température, masse, énergie, volume, etc.

Par exemple, les nombres 20, 18, 50 sont les scalaires des grandeurs suivantes hauteur de 20 m, volume de 18 m force de 50 N.

II – Définitions

Un vecteur est une grandeur définie par une direction, un sens et une intensité.

- La direction est la droite qui porte le vecteur. Elle est définie par l'angle θ mesuré entre un axe de référence et le support.
- Le sens représente l'orientation origine, extrémité du vecteur et est symbolisé par une flèche.
- L'intensité, norme ou module, représente la valeur de la grandeur mesurée par le vecteur. Graphiquement, elle correspond à la longueur de celui-ci. Notation V , $|\vec{V}|$ ou $\|\vec{V}\|$.

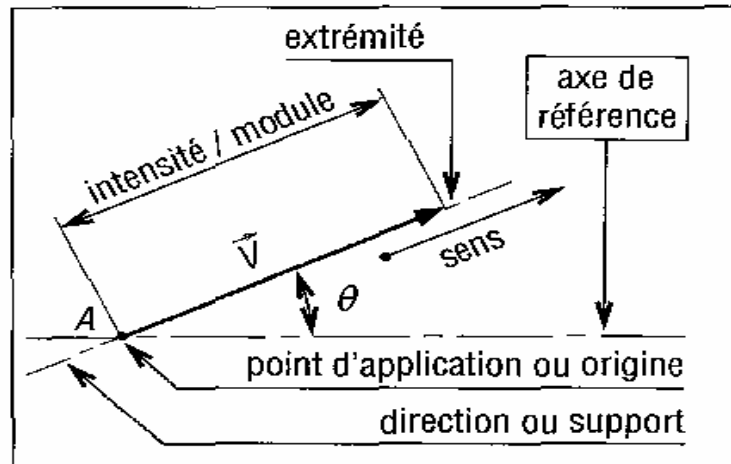


Fig.1

d) Le point d'application est le point qui sert d'origine à un représentant (ou image) du vecteur. Remarque définir un vecteur, c'est connaître les quatre paramètres précédents.

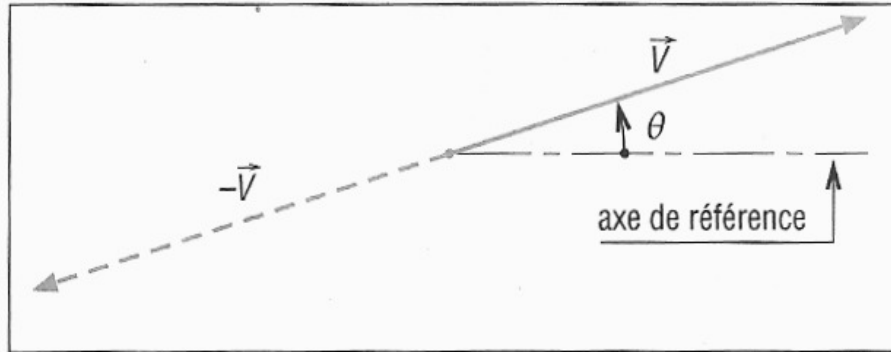


Fig. 2

Vecteur glissant ou glisseur vecteur dont le point d'application peut être quel conque sur un support ou une ligne d'action imposée.

Vecteur lié ou pointeur vecteur ayant un point d'application.

III Opérations sur les vecteurs

1. Addition

Des vecteurs de même nature peuvent être additionnés pour former un troisième vecteur appelé vecteur somme.

Exemple déterminons la somme \vec{R} des deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} et proposés.

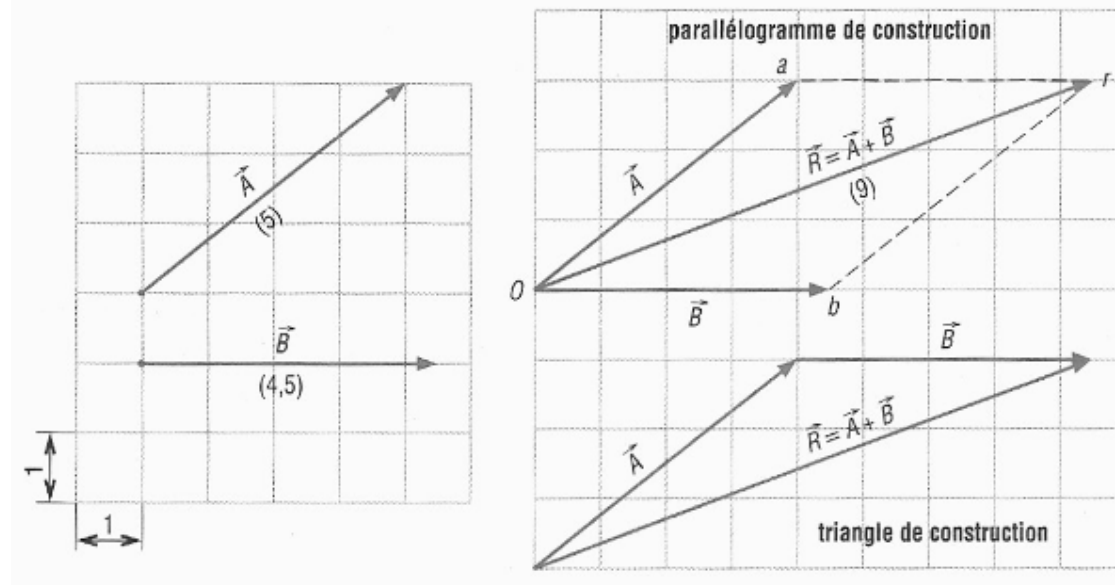
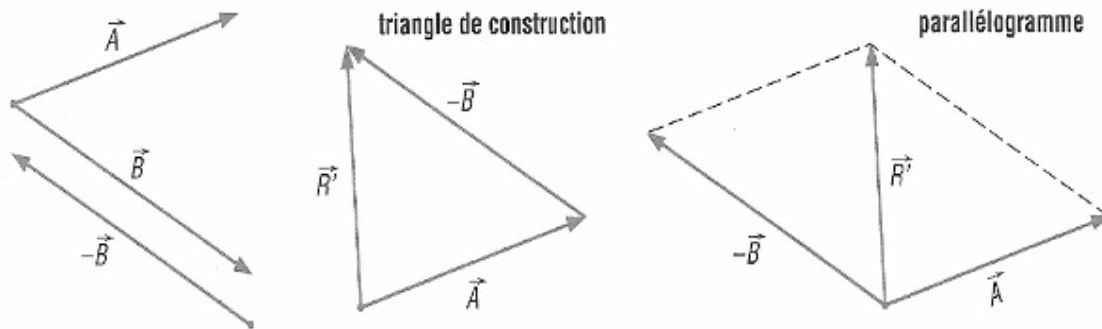


Fig. 3

2. Soustraction

La différence entre les vecteurs \vec{A} et \vec{B} se ramène à une addition en ajoutant le vecteur opposé $(-\vec{B})$.

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) = \vec{R}'$$

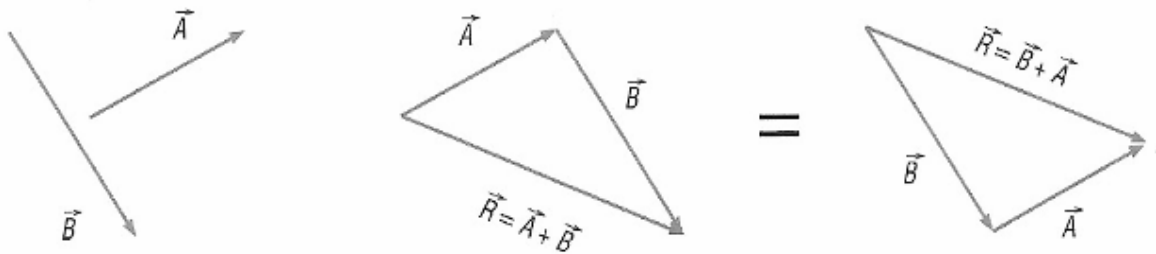


3. Commutativité

L'opération d'addition entre vecteurs est commutative.

Autrement dit :

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} = \vec{R}$$

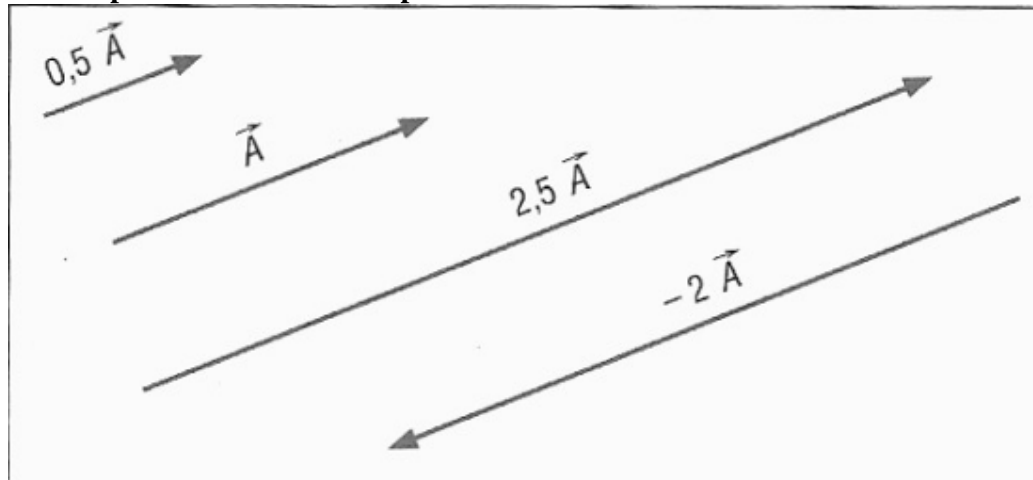


4. Associativité

L'opération d'addition entre plusieurs vecteurs, est associative.

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{R}$$

5. Multiplication d'un vecteur par un scalaire

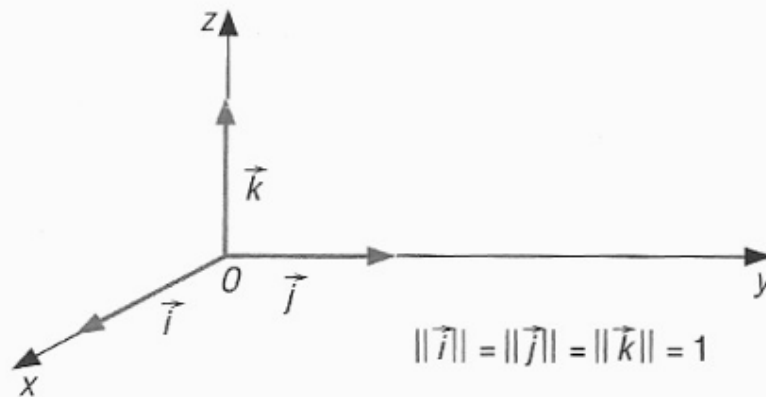




1V - Coordonnées cartésiennes d'un vecteur

1. Vecteurs unitaires

Les vecteurs \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} sont des vecteurs unitaires d'intensité égale à 1.



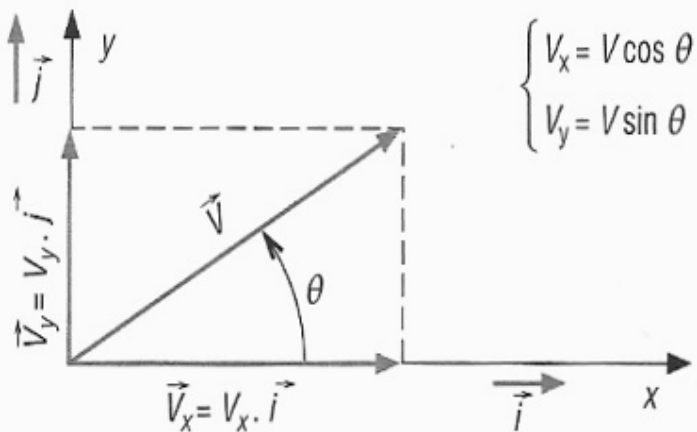
2. Coordonnées dans le plan

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y$$

$$\vec{V} = V_x \cdot \vec{i} + V_y \cdot \vec{j}$$

Direction : $\tan \theta = \frac{V_y}{V_x}$

Intensité : $\|\vec{V}\| = V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$





VI - Produit scalaire de deux vecteurs

1. Définition

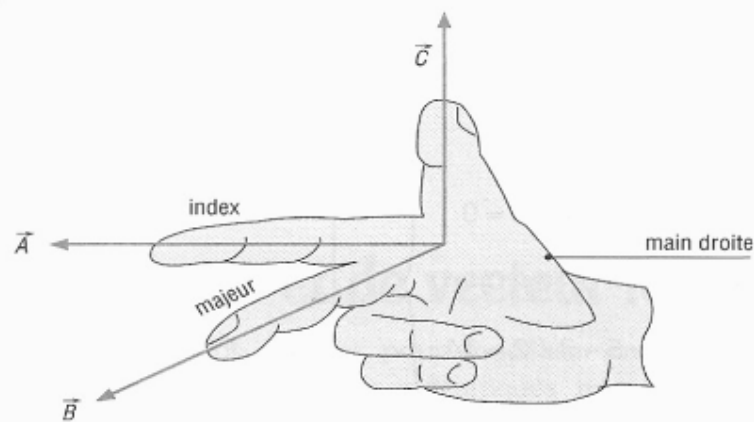
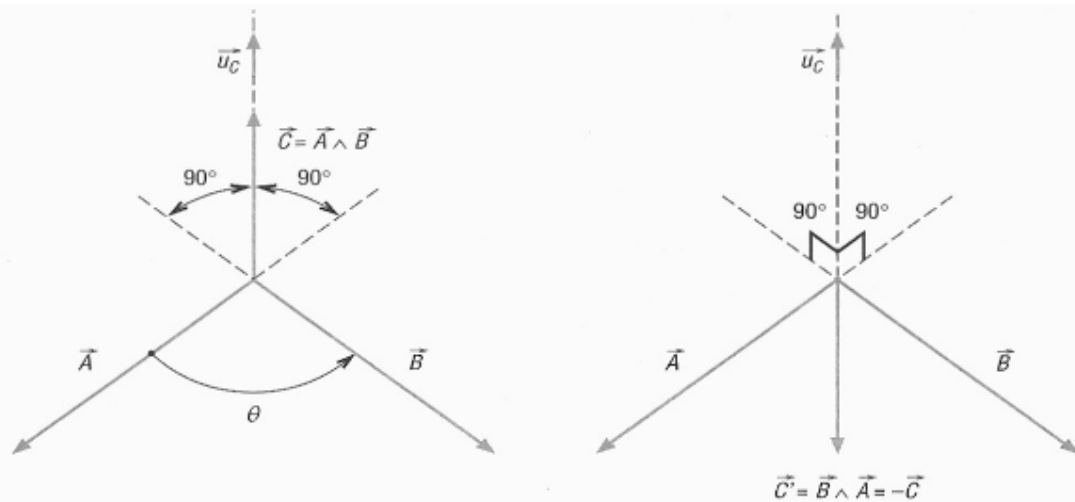
Le produit scalaire du vecteur \vec{A} par le vecteur \vec{B} , noté $\vec{A} \cdot \vec{B}$, est égal au produit des modules des deux vecteurs multiplié par le cosinus de l'angle (θ) entre leurs directions respectives.

VII - Produit vectoriel de deux vecteurs

1. Définition

Le produit vectoriel du vecteur \vec{A} par le vecteur \vec{B} , noté $\vec{A} \wedge \vec{B}$, est un vecteur \vec{C} perpendiculaire au plan (\vec{A}, \vec{B}) et tel que :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{C} = A \cdot B \sin \theta \vec{u}_C \quad \text{avec } \|\vec{C}\| = A \cdot B \sin \theta \text{ et } \|\vec{u}_C\| = 1$$



règle des trois doigts de la main droite



2. Calcul en coordonnées cartésiennes

Si $\vec{A} = A_x \cdot \vec{i} + A_y \cdot \vec{j} + A_z \cdot \vec{k}$

et $\vec{B} = B_x \cdot \vec{i} + B_y \cdot \vec{j} + B_z \cdot \vec{k}$ alors :

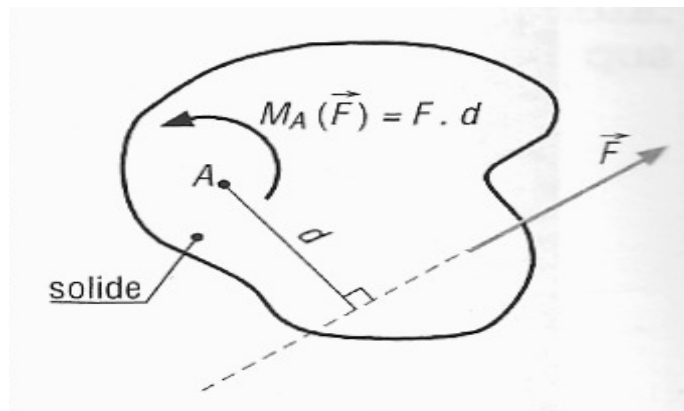
$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (A_y \cdot B_z - A_z \cdot B_y) \vec{i} + (A_z \cdot B_x - A_x \cdot B_z) \vec{j} + (A_x \cdot B_y - A_y \cdot B_x) \vec{k}$$

I - Moment scalaire d'une force par rapport à un point

Définition

Le moment de la force \vec{F} par rapport au point A, noté $M_A(\vec{F})$, est égal au produit de F par le bras de levier d :

$$M_A(\vec{F}) = F \cdot d \quad (d = \text{distance entre A et } \vec{F})$$



II - Vecteur-moment

En statique ou en dynamique dans l'espace, la notion de moment scalaire ou algébrique du paragraphe précédent ne suffit plus. Le moment d'une force doit être décrit sous forme vectorielle (vecteur-moment) et défini à partir d'un produit vectoriel.

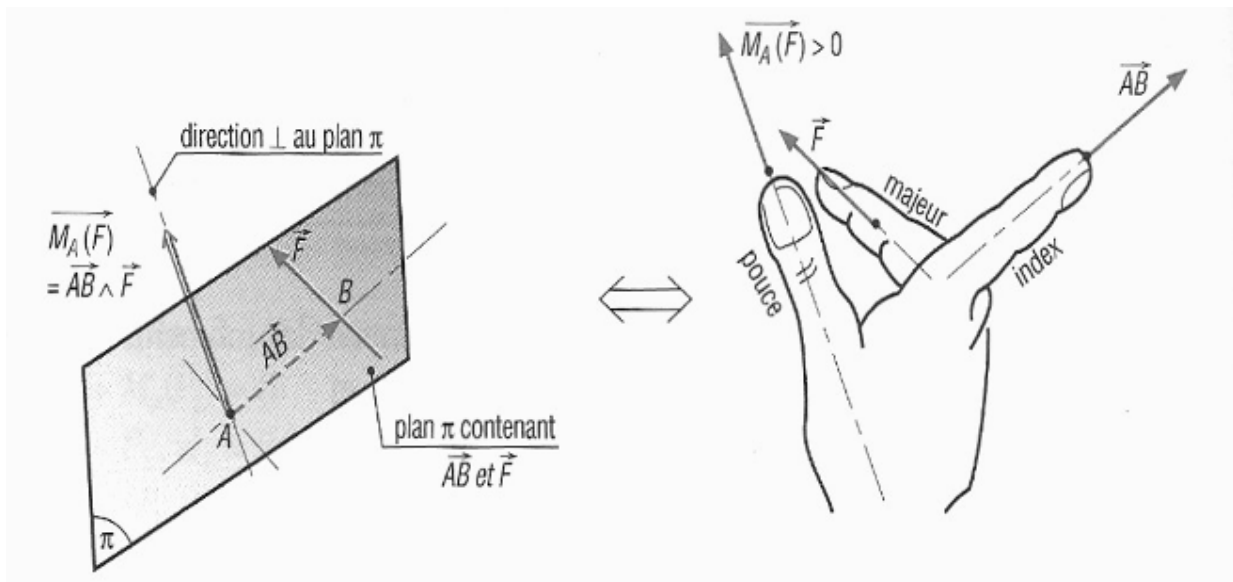
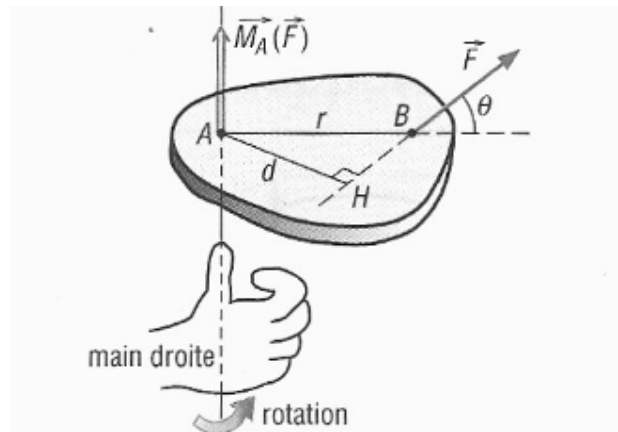
Définition

Soit un point B, quelconque, appartenant à la direction de la force \vec{F} . Le moment en A de la force \vec{F} est défini par le vecteur :

$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{AB} \wedge \vec{F}$$



$\vec{M}_A(\vec{F})$ est un vecteur à la fois perpendiculaire à \vec{F} et à \vec{AB} .



**TRAVAUX DIRIGEE****A Traction et compression**

1. Dimensionner une barre en acier de section carrée, soumise à la traction avec une force $P=56 \text{ kN}$.
La contrainte pratique à l'extension $\sigma_{pe}=140 \text{ MPa}$.

SOLUTION

a) calculs de l'aire transversale de la barre.

$$A_{nec} = P / \sigma_{pe} = 56000 \text{ N} / 140 \times 10^6 \text{ Pa} = 56000 \text{ N} / 140 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

-on note a la coté du carré de la section transversale de la barre.

$$a = 2 \times 10^{-2} \text{ m} = 20 \text{ mm}.$$

2. Vérifier un tirant en acier sachant que :

- la force de traction est $P=60 \text{ kN}$;
- l'aire de la section transversale $A= 6 \times 10^{-4} \text{ m}^2$;
- la contrainte pratique à l'extension $\sigma_{pe}=140 \text{ MPa}$.

SOLUTION

a) on vérifie les contraintes intérieures existant dans le tirant

$$\sigma_{effective} = P/A; (P \text{ effective}/A \text{ effective})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{effective} &= P \text{ effective}/A \text{ effective} = 60000 \text{ N} / 6 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 100000000 = \\ &= 100 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 100 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

Conclusions :

Les contraintes dues aux forces extérieures de traction sont inférieures à la contrainte pratique à l'extension σ_{pe} . Donc le tirant résiste à l'effort de traction P .

3. Dimensionner une barre en bois de section carrée de coté a , longueur 2 m soumise à la traction d'une force de 25 kN , dans les conditions suivantes :

- la contrainte pratique à l'extension $\sigma_{pe}=10 \text{ MPa}$
- l'allongement maximal il ne faut pas dépassé $\Delta l=1,5 \text{ mm}$.
- le module d'élasticité du bois $E=10^4 \text{ MPa}$.

SOLUTION

En utilisant la relation de dimensionnement :

$$A_{nec} = N / \sigma_{pe} = 25000 \text{ N} / 10 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 25 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\text{On obtiens } a = \sqrt{25 \times 10^{-4}} \text{ m}^2 = 5 \times 10^{-2} \text{ m}^2 = 50 \text{ mm}.$$

En utilisant la condition de rigidité :

$$\frac{N}{S} = E \frac{\Delta l}{l}$$



Unités :

S en mm²E en MPa (N/mm²)

Δl et l en mm

N en Newton

A nec=S;

$$A_{nec} = N \times l / \Delta l \times E = 25000 \text{ N} \times 2 \text{ m} / 10^{-4} \times 10^6 \text{ N} / \text{m}^2 \times 1,5 \times 10^{-3} \text{ m} = 33,3 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

On résulte:

$$a = 10^{-2} \sqrt{33,3} \text{ m}^2 = 5,76 \times 10^{-2} \text{ m} = 57,6 \text{ mm}.$$

Conclusion ;

Le dimensionnement répond à tous les deux conditions si la coté de la barre est calculée avec la condition de rigidité.

B. Contraintes causée à la variation de température.

Soit une barre encastrée à tous les deux extrémités et soumise à une variation de température.

On demande à calculer les contraintes pour une variation de température de t₁ à t₂.

La condition de rigidité est : la longueur de la barre reste la même après la variation de la température.

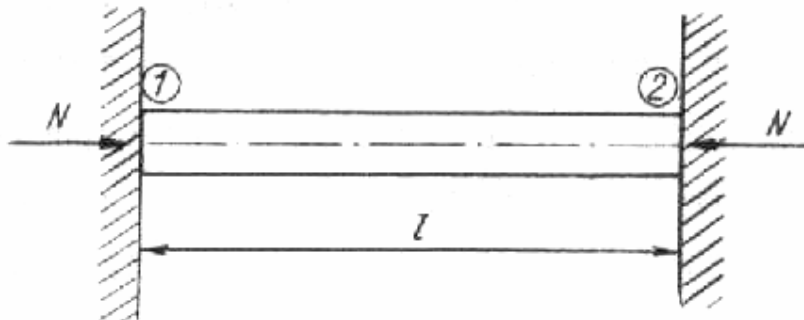
L'allongement de la barre au cause du chauffage Δl_{dilat} (si une extrémité sera libre) est égale au raccourcissement Δl_{comp} causée des forces de réaction N.

Fig.1

$$\Delta l_{dilat} = \Delta l_{com}$$

$$\Delta l_{dilat} = a \cdot l (t_2 - t_1)$$

$$\Delta l_{com} = N \cdot l / E \cdot A$$

$$N \cdot l / E \cdot A = a \cdot l (t_2 - t_1) \text{ mais } N/A = \sigma_{pe}$$

$$\sigma_{pe} = E \cdot a (t_2 - t_1).$$

Application

1 Calculer les contraintes dans une raille soumise à une variation de température de 50° C par rapport à la température de montage.

On donne : Module d'élasticité E=2,1x10⁵ MPa, coefficient de dilatation linéaire

$$a = 12 \times 10^{-6}.$$



-la contrainte pratique à l'extension $\sigma_{pe}=200$ MPa.

SOLUTION

$$\sigma_{pe}=E\alpha(t_2-t_1)=2,1 \times 10^5 \times 10^6 \times 12 \times 10^{-6} \times 50 = 126 \text{ MPa} < 200 \text{ MPa.}$$

C. Calculs des rivets

Les efforts tranchants dans une section du rivet sont :

$$\tau = T_1 / \pi d^2 / 4 = \tau_p \text{ En pratique on tien compte de la pression de contact } \sigma_p$$

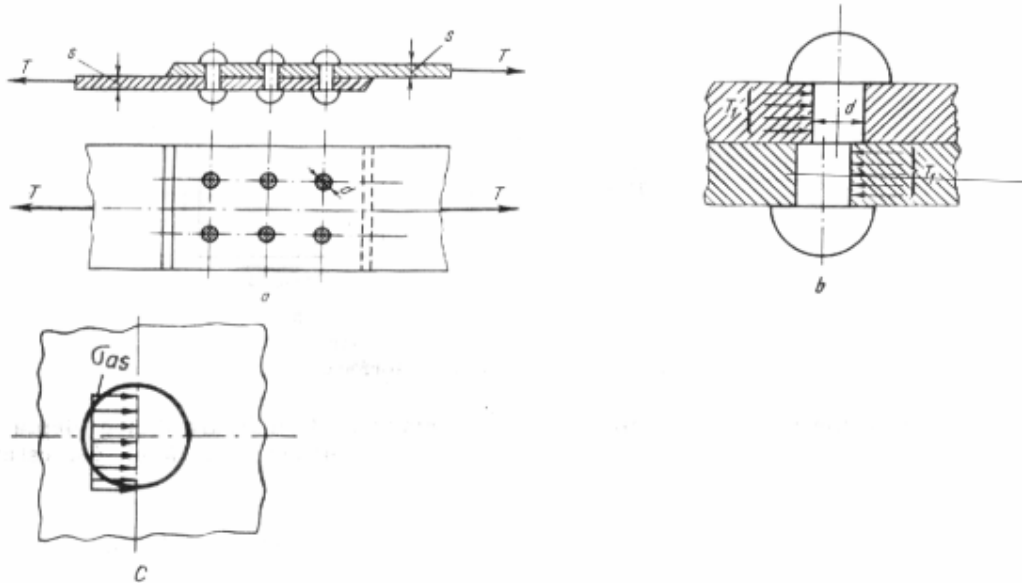


Fig.2

$$T_1 = \sigma_p d s \quad (\sigma_p = \sigma_{as} \text{ - contrainte admissible})$$

Pour les rivets à une seule section de cisaillement résulte :

$$d = 4 / \pi \times (\sigma_p / \tau_p) \times s$$

Application

1 Soit l'ensemble ci-joint, déterminer le diamètre et le nombre de rivets nécessaire sachant que :

- la force qui sollicite l'ensemble, $T=30$ kN.
- largeur du plat bande, $b=50$ mm.
- l'épaisseur de la tôle $s=5$ mm.
- le contrainte pratique de cisaillement pour le matériel du rivet $\tau_p=140$ MPa
- le contrainte pratique de contact (de matage) $\sigma_p=200$ MPa.

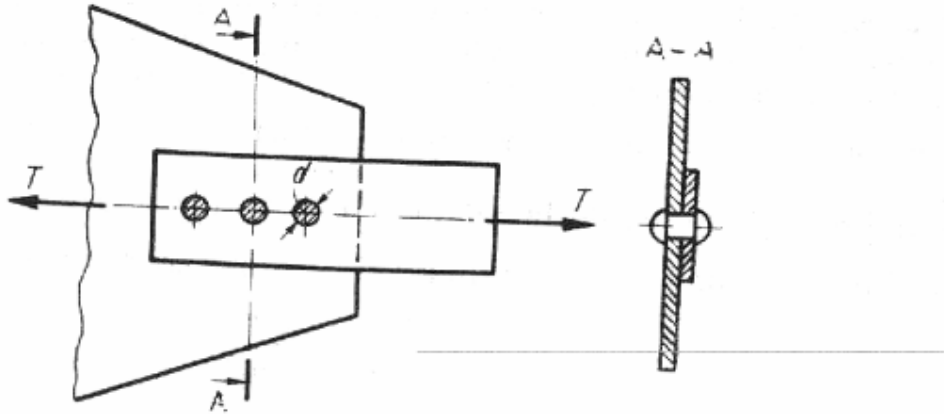


Fig.3

SOLUTION

a) Le diamètre du rivet est :

$$d = 4/\pi \times (\sigma_p / \tau_p) \times s = (4/\pi) \times (220/140) \times 5 \times 10^{-3} = 10^{-2} \text{ m.}$$

b) L'effort tranchant dans un rivet est :

$$T_1 = (\pi d^2 / 4) \times \tau_p = (\pi/4) \times 10^{-4} \times 140 \times 10^6 = 11 \text{ kN.}$$

c) Calculs du nombre des rivets.

$$N = T / T_1 = 30 / 11 = \text{approx } 3 \text{ rivets.}$$

D. Moments statiques

a) Moment statique d'une surface plane par rapport à un axe de son plan**Définition**

Soit (S) une surface plane et un repère orthonormé (O,x,y) associé.

Le moment statique de la surface A par rapport à (O,x), noté S_x G- représente le centre de gravité de la surface A de coordonnées z_G, y_G ΔA - représente un élément de surface de coordonnées z et y.Moment statique pour l'élément de surface ΔA par rapport à l'axe z est $y_{\Delta A}$



$$S_x = \sum_A y \Delta A = y_G A$$

$$S_y = \sum_A z \Delta A = z_G A$$

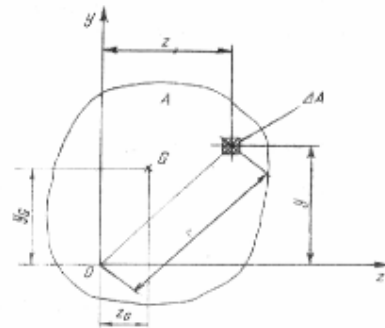


Fig. 4.

Par définition le moment statique de la surface entière A ,par rapport à l'axe z est égale à la somme des moments statiques de toutes surfaces élémentaires :

$$S_z = \sum y \Delta A = y_1 \Delta A_1 + y_2 \Delta A_2 + y_3 \Delta A_3 + \dots + y_n \Delta A_n$$

Si on connaît le centre de gravité de la surface A ,G(z_G, y_G), les moments statiques S_z et S_y Sont :

$$S_z = \sum y \Delta A = y_G A$$

$$S_y = \sum z \Delta A = z_G A$$

Application

- 1 Calculer le moment statique pour la surface hachurée de la figure ci-joint par rapport à l'axe Oz.

$$S_x = A y_G = \left[y + \frac{\frac{h}{2} - y}{2} \right] b \left[\frac{h}{2} - y \right] = \frac{b}{2} \left[\frac{h^2}{4} - y^2 \right]$$

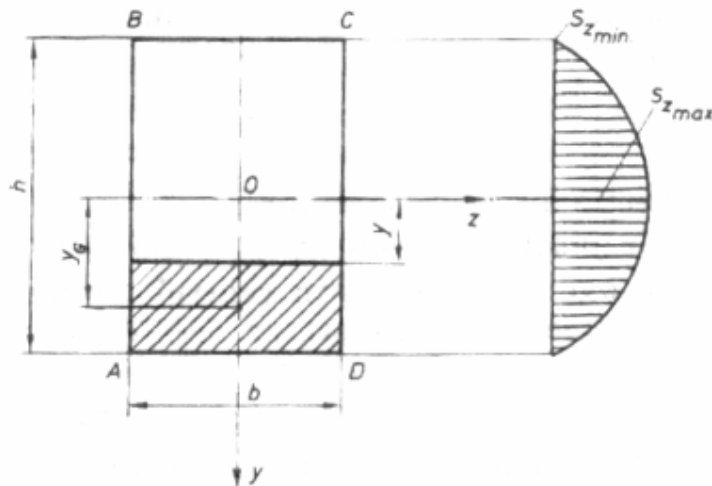


Fig. 6



Pour $y=0$:

$$S_z = b h^2 / 8$$

E. Moments quadratiques

Moment quadratique d'une surface plane par rapport à un axe de son plan

Définition

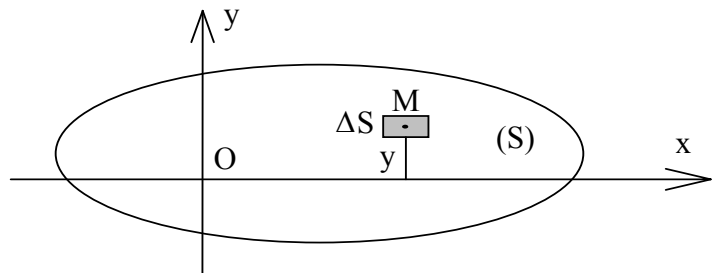
Soit (S) une surface plane et un repère orthonormé (O, x, y) associé.

Le moment quadratique élémentaire de ΔS par rapport à (O, x), noté ΔI_{Ox} est défini par

$$\Delta I_{Ox} = y^2 \cdot \Delta S$$

et pour l'ensemble de la surface (S) :

Fig. 7



$$I_{Ox} = \sum_{(S)} y^2 \cdot \Delta S$$

Remarques :

- * L'unité de moment quadratique est le mm^4 (ou le m^4)
- * Un moment quadratique est toujours positif.
- * Les moments quadratiques des surfaces "simples" sont donnés à la suite du cours.

Moment quadratique d'une surface plane par rapport à un axe normal.

Moment quadratique polaire.

Définition

Soit (S) une surface plane et un repère orthonormé (O, \vec{x} , \vec{y} , \vec{z}) associé.

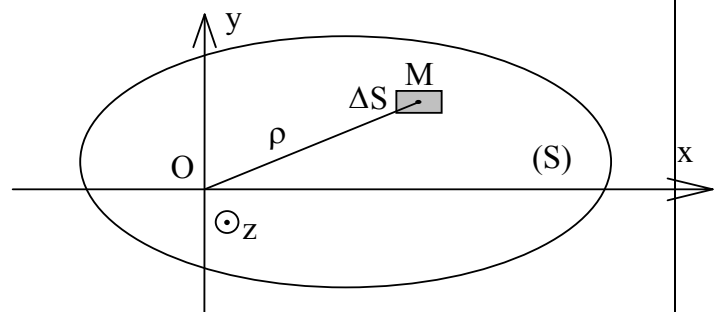


Fig. 8

Le moment quadratique polaire élémentaire de ΔS par rapport à (O, \vec{z}) perpendiculaire en O au plan de la figure et noté ΔI_O est défini par :

$$\Delta I_O = \rho^2 \cdot \Delta S$$

et pour l'ensemble de la surface (S) :

$$I_O = \sum_{(S)} \rho^2 \cdot \Delta S$$

Propriété :

Considérons le moment quadratique polaire I_O de la surface (S) par rapport à (O, \vec{Z}) perpendiculaire en O à son plan.

Notons :
$$I_O = \sum_{(S)} \rho^2 \cdot \Delta S$$

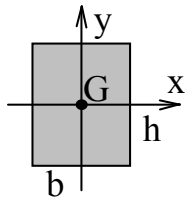
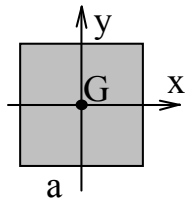
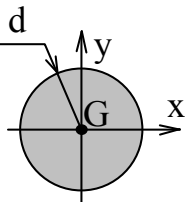
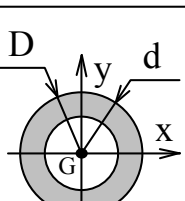
Soient x et y les coordonnées du point M. On a : $\rho^2 = x^2 + y^2$

On a donc :
$$I_O = \sum_{(S)} \rho^2 \cdot \Delta S = \sum_{(S)} x^2 \cdot \Delta S + \sum_{(S)} y^2 \cdot \Delta S$$

Soit :

$$I_O = I_{Ox} + I_{Oy}$$

Moments quadratiques utiles

	I_{GX}	I_{GY}	$I_G = I_O$
	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{bh}{12} (b^2 + h^2)$
	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{6}$
	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{32}$
	$\frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$	$\frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$	$\frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$



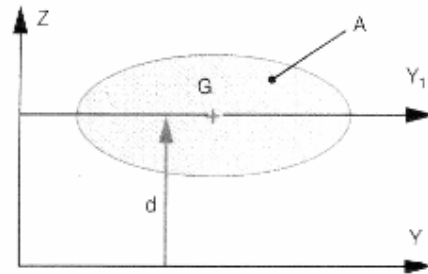
Théorème de HUIGENS

THÉORÈME
DE HUYGENS

Énoncé : Le moment quadratique d'une surface A par rapport à l'axe Y situé dans son plan est égal à la somme :

- du moment quadratique de la surface A par rapport à l'axe Y_1 parallèle à l'axe Y et passant par le centre de gravité G de la surface.
- du produit de l'aire de surface A par le carré de la distance d entre les deux axes Y et Y_1 .

$$I_Y = I_{GY_1} + A \cdot d^2$$



F. Modules de résistance

Par définition le module de résistance d'une surface par rapport à un axe est le rapport du moment d'inertie quadratique de la surface et la distance maximale au bord de la section et cet axe.

$$W_z = I_z / y_{\max}; W_y = I_y / z_{\max}$$

Application

1 Déterminer les relations pour calculs des modules de résistance pour les sections : rectangulaire, circulaire et anneau.

-pour une section rectangulaire de coté b et h.

$$I_z = \frac{bh^3}{12}; I_y = \frac{hb^3}{12}; y_{\max} = h/2; z_{\max} = b/2.$$

$$W_z = I_z / y_{\max} = \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{2}{h} =$$

$$W_y = I_y / z_{\max} = \frac{hb^3}{12} \cdot \frac{2}{b} =$$

-pour une section ronde (circulaire) de diamètre d :

$$I_z = I_y = \pi d^4 / 64; y_{\max} = z_{\max} = d/2;$$

$$W_z = W_y = \pi d^4 / 64 / (d/2) = \pi d^3 / 32;$$



-pour une anneau circulaire de diamètre extérieur D et diamètre intérieur d ;

$$I_z=I_y= \pi(D^4-d^4)/64 ; y_{\max}= z_{\max} =D/2 ;$$

$$W_z=W_y= \pi(D^4-d^4)/64/ D/2 = \pi(D^4-d^4)/32D ;$$

b) Modules de résistance polaire

Modules de résistance polaire est définie par le rapport suivant :

$$W_p= I_p/R,$$

Ou I_p est le moment d'inertie polaire, R est le rayon

-pour une section ronde de diamètre d :

$$I_p= \pi d^4/32 ;R=d/2 ;$$

$$W_p= \pi d^4/32/ d/2 = \pi d^3/16 ;$$

-pour une anneau circulaire de diamètre extérieur D et diamètre intérieur d ;

$$W_p= \pi d^4/32/ d/2 = \pi(D^4-d^4)/16D ;$$

G .La flexion des barres droite

a)Définition : Une barre droite est soumise à la flexion quand les charges appliquées sont moments des forces ou des forces qui se trouvent dans des plans qui passent par l'axe de la barre.

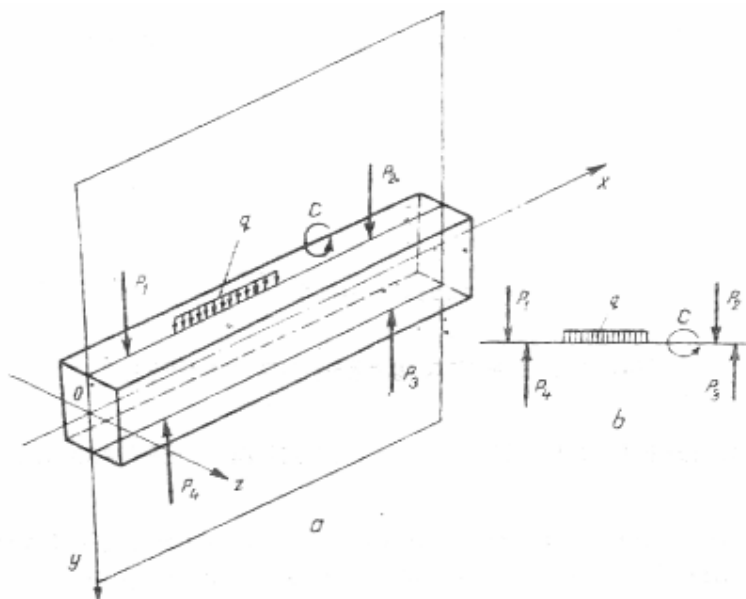


Fig.9



b) Effort normal – Effort tranchant. Moment fléchissant

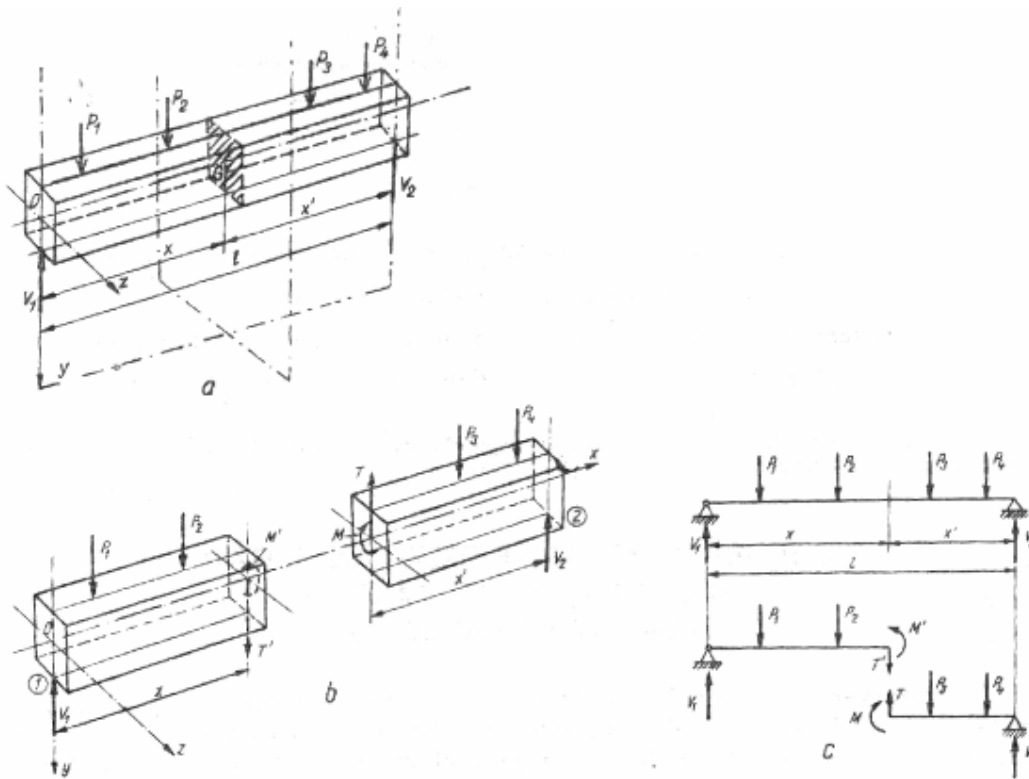


Fig.10

c) Convention des signes.

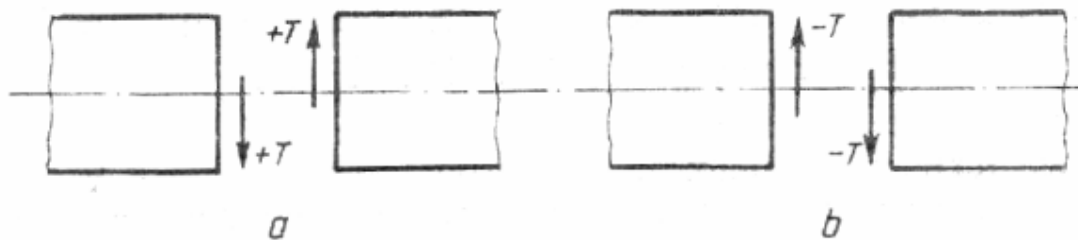


Fig 11

L'effort tranchant, dans une section de la barre est égal à la somme algébrique de toutes les projections sur l'axe de la barre, des forces extérieures (même les réactions) qui agissent

sur la partie gauche de la barre ou des forces de droit de la section avec le signe changé

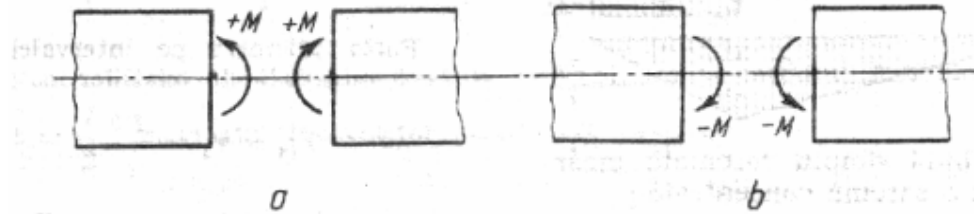


Fig 12

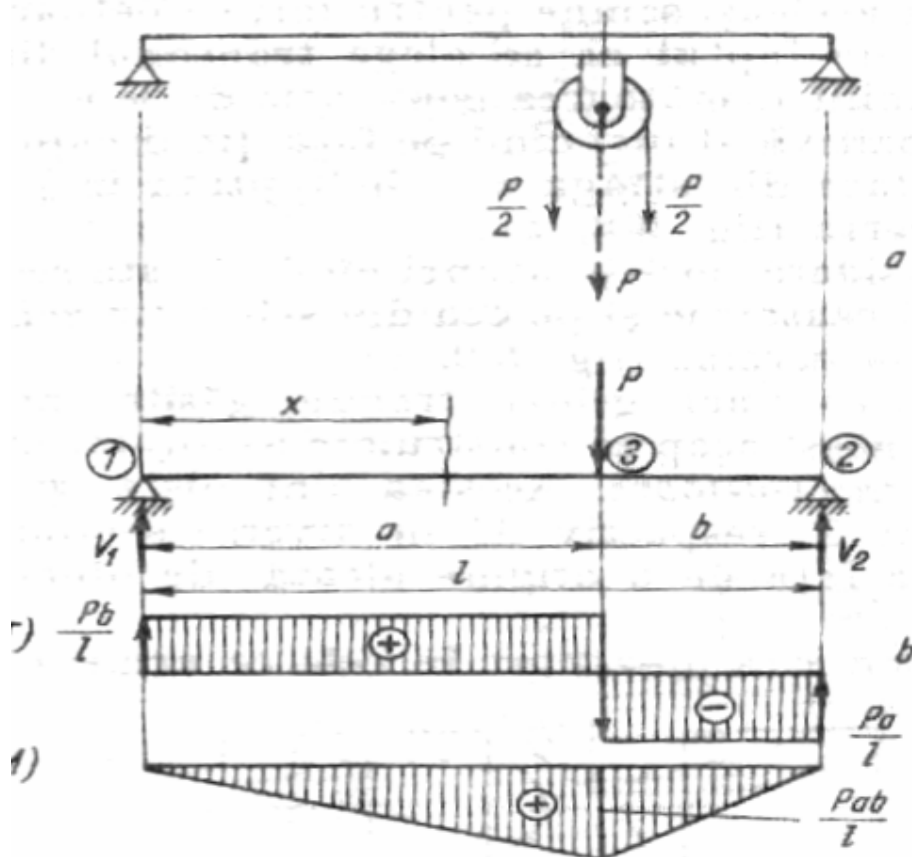
Le moment fléchissant, dans une section de la barre, est égale à la somme algébrique de toutes les moments des forces (même ces des réactions) qui agissent sur la partie située à gauche de la section ou des ceux de droit de la section avec le signe changée.

Remarque : Il y a des autres conventions.

d) Diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissant.

Applications

I)





-On calcule les réactions en écrivant les équations des moments par rapport aux appuis.

$$V_1 \cdot P_b = 0$$

$$V_2 \cdot P_a = 0$$

On obtien :

$$V_1 = P_b/l ; V_2 = P_a/l$$

-L'effort tranchant sur les zones 1-3 et 3-2

$$T_{1_3} = V_1 = P_b/l ;$$

$$T_{3_2} = V_1 - P = -P_a/l = -V_2$$

-Le moment fléchissant pour l'intervalle 1-3

$$M_{1_3} = V_1 x = P(b/l)x$$

-Le moment fléchissant pour l'intervalle 3-2

$$M_{3_2} = V_1 x - P(x-a) = P(b/l)x - P(x-a)$$

- Le moment fléchissant maximal maximal est

$$M_{\max} = M_3 = Pab/l$$

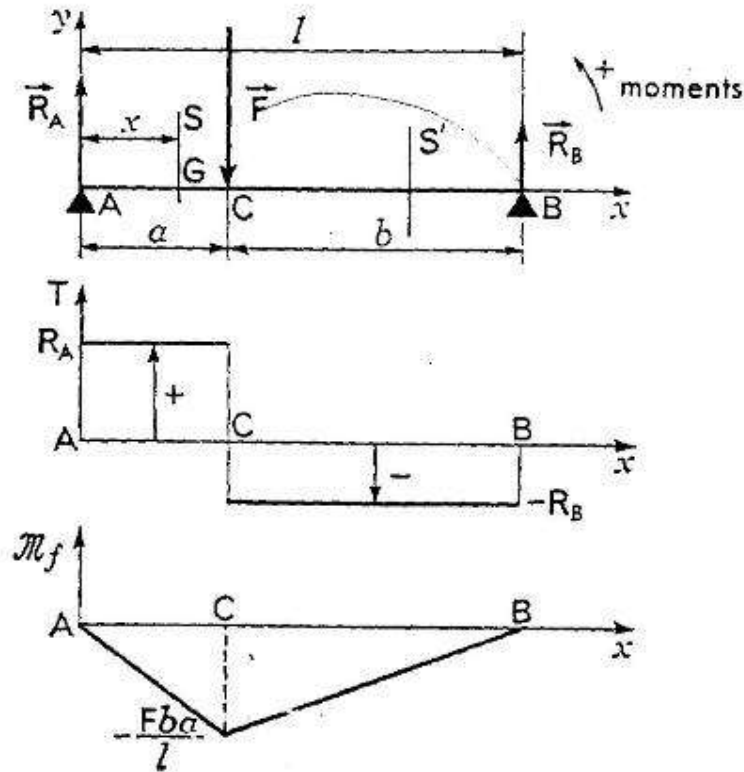
-Pour $a=b$ on a :

$$M_{\max} = Pl/4.$$



Diagrammes des efforts tranchants et des moments de flexion

II) Poutres sur deux appuis de niveau. Charges localisées.
Détermination des actions de contact en A et B.



- Les forces appliquées à la poutre sont : son poids. (négligé), F connue, R_A , et R_B d'intensités inconnues. La première condition d'équilibre est

$$F + R_A + R_B = 0 \quad \rightarrow \quad \rightarrow$$

soit, par projection sur Ay : $-F + R_A + R_B = 0$.

En exprimant les moments en A et en projetant sur Az (Axyz trirectangle direct), la deuxième condition d'équilibre donne :

$$-Fa + R_B l = 0$$

Soit. $R_B = Fa / l$ puis $R_A = Fb / l$

Diagramme des T .

- La force F sépare la poutre en deux régions AC et CB.

Entre A et C (section S) $T = R_A$

Entre C et B (section S') $T = R_A - F = -R_B$. La variation de T est représentée par la figure ci-dessus.

En C il y a discontinuité pour T .

Diagramme des M_f

Entre A et C, $M_f = R_A x$

En A, $M_f = 0$, en C, $M_f = -Fb \cdot a / l$

Entre C et B $M_f = -R_A x + F(x-a)$

$M_f = x(F - R_A) - Fa = x R_B - Fa = Fa / l x - Fa$



en B, $M_f = 0$.

La variation de M_f est représentée par la troisième partie de la figure ci-dessus.

Remarquons que $M_{f \max} = Fba/l$

III) Poutre avec porte à faux.

Calcul des actions de contact en A et B.

- On obtient immédiatement par la statique

$$R_A = 7/4F \text{ et } R_B = 1/4F$$

Diagramme des T

Entre D et A: $T = -F$

Entre A et C: $T = -F + R_A = 3/4 F$

Entre C et B: $T = -F + R_A - F = -1/4 F$

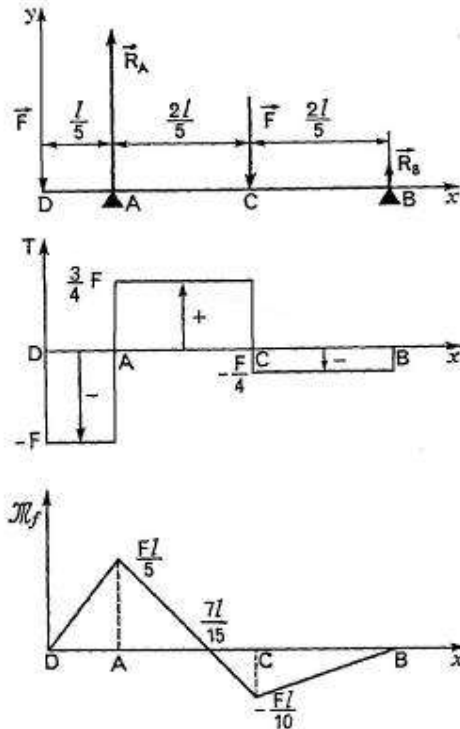


Diagramme des M_f

Entre D et A: $M_f = Fx$

En A: $M_f = Fl/5$

Entre A et C: $M_f = Fx - R_A(x - l/5) = (F - R_A)x + R_A l/5$

$$M_f = -3/4 Fx + 7l/20 F$$

En C: $M_f = -Fl/10$ par ailleurs, $M_f = 0$ pour $x = 7l/15$

Entre C et B: $M_f = Fx - R_A(x - l/5) + F(x - 3l/5)$

soit, après réduction: $M_f = Fx - F/4$

En B: $M_f = 0$.

Charges réparties. - Préliminaire. - Comme exemples de charges réparties, on peut citer : le poids propre des poutres, les charges généralement supportées par un tablier de pont, un plancher, une toiture, la caisse d'un véhicule.

Mise en évidence de la charge unitaire q (N/m).

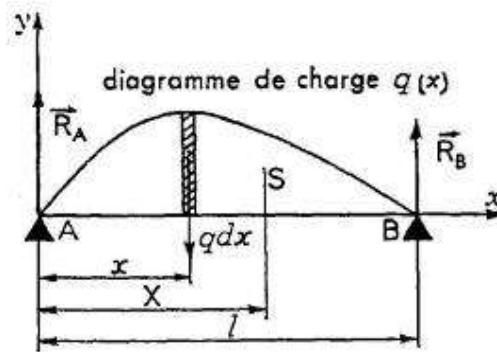


Dans l'exemple représenté par la figure ci-dessous, la charge est uniformément répartie sur six poutres parallèles (profilés en I). Si p est le poids unitaire de la charge en N/m^2 , la charge totale a pour expression

$$F = pLl.$$

La charge supportée par une poutre. est alors $Q = pdl$, ce qui permet de mettre en évidence une charge unitaire ou taux de charge : $q = Q/l$ en N/m

Le diagramme de cette charge uniforme est représenté sur la figure ci-dessous



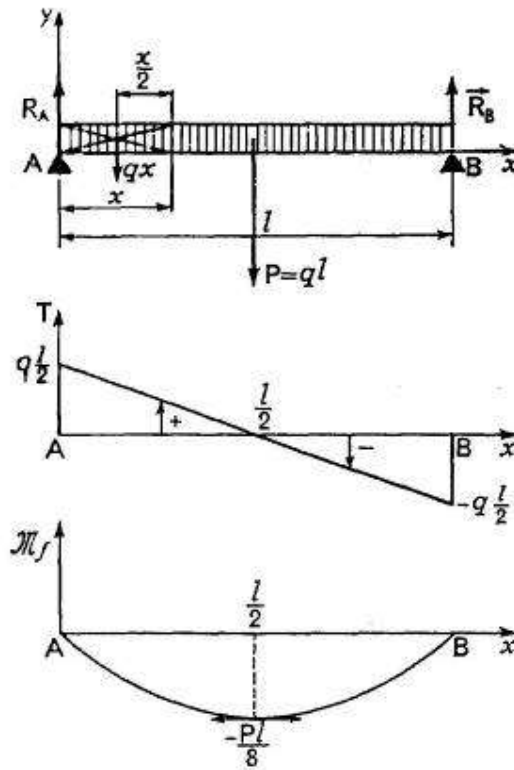
IV) Exemple. Poutre de poids $P = ql$ (q , poids unitaire en N/m).

Actions de contact en A et B.

- Par symétrie $R_A = R_B = q l/2$

Diagramme des T :

Entre A et B : $T = R_A - qx$ ou $T = ql/2 - qx$



La variation de T est du premier degré figure ci-dessous et $T = 0$ pour $x = l/2$

Diagramme des M_f

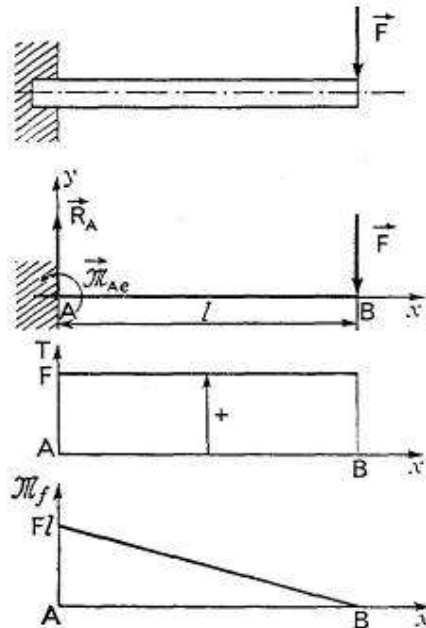
Entre A et B $M_f = -R_A x + qx \cdot x/2 = -qlx/2 + qx^2/2$

La variation de M_f est du deuxième degré (arc de parabole représenté par la troisième partie de la figure ci-dessous).

Pour $x = l/2$, $M_{fmax} = Pl/8$

V). Poutres encastées à une extrémité.

- a) Charges localisées :



Actions de l'encastrement.

- Équilibre de la poutre (poids négligé)
- la condition $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ donne, par projection sur Ay:
 - $F + R_A = 0$ ou $R_A = -F$
- la condition $\Sigma \vec{M}_A = \vec{0}$ donne, par projection sur Az.
 - $F l + M_{AZ(enc)} = 0$

Diagramme des T

Entre A et B : $T = R_A = F$.

Diagramme des M_f :

$$M_f = M_{enc.} - Fx$$

$$M_f = Fl - Fx$$

$$M_f = Fl$$

VI) Charges réparties uniformément.

Actions de l'encastrement

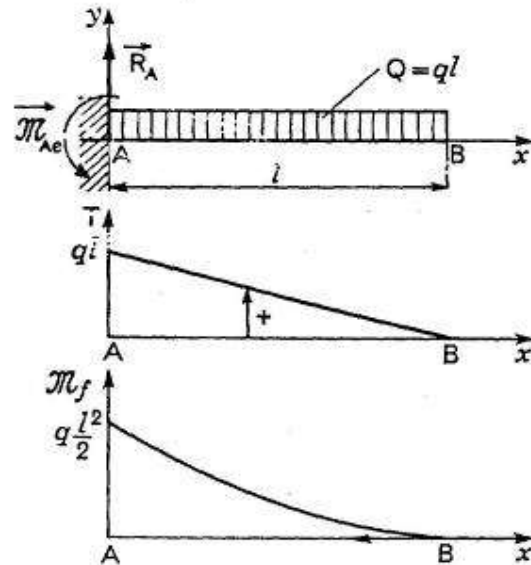
$$R_A = ql$$

$$M_{Aze} = ql^2/2$$

Diagramme des T. : - Entre A et B : $T = R_A - qx = ql - qx$.

Diagramme des M_f :

$$M_f = ql^2/2 - R_A x + qx^2/2 = qx^2/2 - qlx + ql^2/2$$



La valeur maximale est obtenue pour $x=0$; $M_f = ql^2/2 = Ql/2$

VII) On donne la poutre représentée par la figure ci-dessous. Déterminer :

1. Les actions de contact en A et B.
2. Le diagramme des efforts tranchants T.
3. Le diagramme des moments de flexion M_f .

Calcul des actions de contact en A et B. - L'utilisation des deux conditions d'équilibre (Cf. Statique) donne immédiatement :

$$R_A = 6800\text{N et } R_B = 6200\text{N}$$

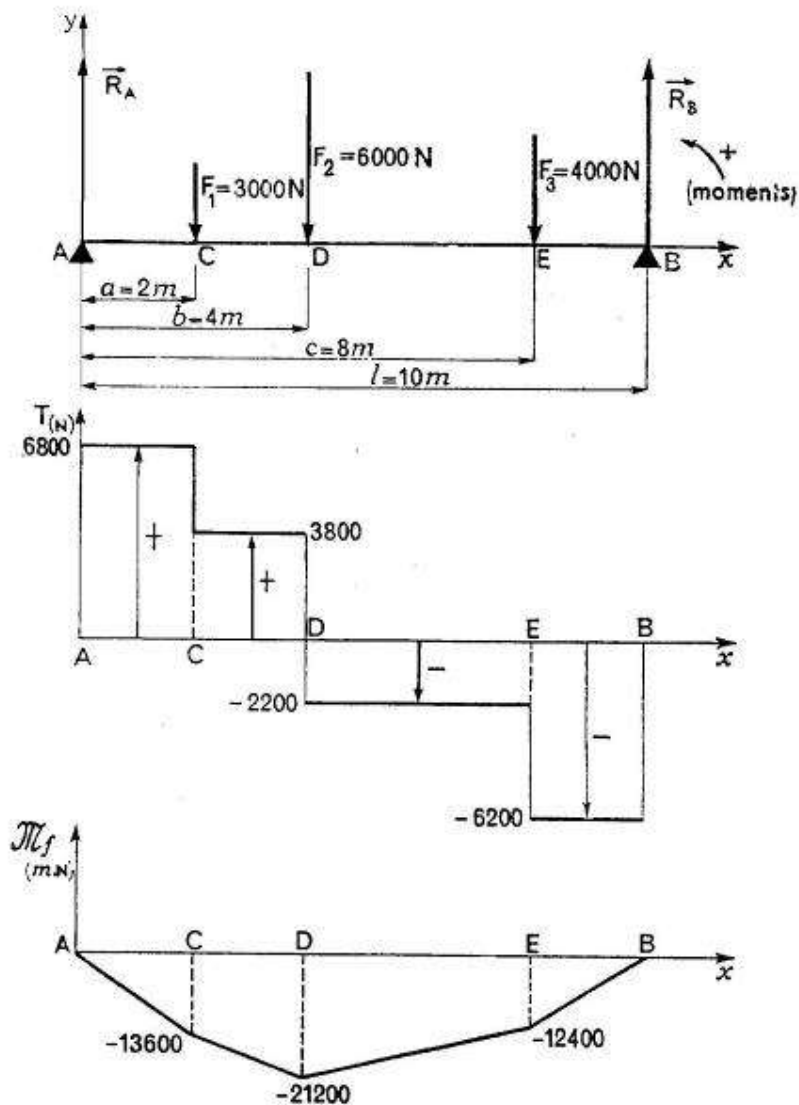
Diagramme des T

Entre A et C, $T = R_A = 6800\text{N}$.

Entre C et D, $T = R_A - F_1 = 3800\text{N}$.

Entre D et E, $T = R_A - F_1 - F_2 = -2200\text{N}$.

Entre E et B, $T = R_A - F_1 - F_2 - F_2 = -6200\text{N}$.



3 Diagramme des M_f :

Entre A et C : $M_f = -R_A x$.

En C : $M_f = -13\,600$ Nm.

Entre C et D : $M_f = -R_A x + F_1(x-a) = (F_1 - R_A)x - F_1 a$.

En D : $M_f = -21\,200$ Nm.

Entre D et E : $M_f = -R_A x + F_1(x-a) + F_2(x-b)$,

$$M_f = (F_1 + F_2 - R_A)x - F_1 a - F_2 b.$$

En D : $M_f = 12\,400$ Nm.

Entre E et B : $M_f = -R_A x + F_1(x-a) + F_2(x-b) + F_3(x-c)$

$$M_f = (F_1 + F_2 + F_3 - R_A)x - F_1 a - F_2 b - F_3 c.$$

En B : $M_f = 0$

Le moment de flexion maximal est au droit de F_2 : $M_{f \max} = 21\,200$ N m

- Vérifier la poutre reposant sur deux appuis sachant que la poutre est confectionnée en tube d'acier .On donne :
 $D=8$ cm; $d=5,5$ cm ; $S_{pe}=1300$ kgf/cm².

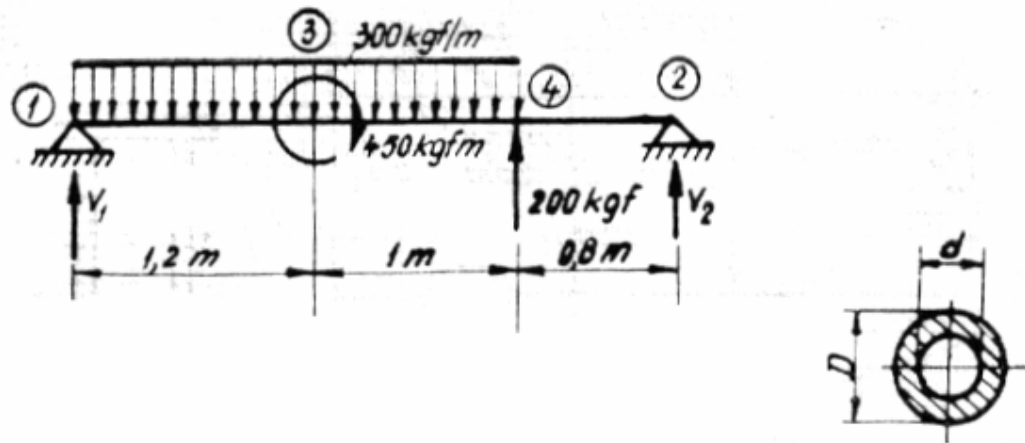


Fig 1

SOLUTION

a) Calculs des réactions.

La charge uniformément répartie est équivalente à une charge concentrée égale à

$$F_1 = q \times l = 300 \text{ kgf/m} \times 2,2 \text{ m} = 660 \text{ kgf}$$

Pour calculer les réactions on utilise les équations d'équilibre (équations d'équarrissage)

$$\Sigma F = 0 ;$$

$$\Sigma M = 0 ; (\text{par rapport au point 2})$$

$$F_1 - F_2 = V_1 + V_2$$

$$V_1 \times 3 + M_c - F_1 \times 1,9 + F_2 \times 0,8 = 0$$

$$V_1 = \frac{-M_c + F_1 \times 1,9 - F_2 \times 0,8}{3}$$

$$V_1 = \frac{-450 + 660 \times 1,9 - 200 \times 0,8}{3} = 214,67 \text{ kgf}$$

$$V_2 = F_1 - F_2 - V_1 ;$$

$$V_2 = 246 \text{ kgf} ;$$

b) Diagramme des efforts tranchants.

Pour la zone 1-4

$$T_{1-4} = V_1 - q \times x$$

$$\text{Dans le point 4, } T'_4 = 214 - 300 \times 2,2 = -446 \text{ kgf}$$

Mais dans le point 4 il y a la force F_2 ;

$$\text{Donc } T_4 = T'_4 - F_2 = -446 + 200 = -246 \text{ kgf}$$

Pour la zone 4-2 les efforts tranchants restent le même comme dans le point 4

Dans le point 2 (appui 2) :

$$T_2 = T_{2-4} + V_2$$

$$T_2 = -246 + 246 = 0$$



c) Diagramme de moments fléchissant.

Pour la zone 1-4

$$M_{1-4} = M_{1-4} = V_1 \times x - q \times x \times \frac{x}{2} = V_1 \times x - q \times \frac{x^2}{2}$$

Pour $x=0$:

$$x = 0; M_1 = 0;$$

Déterminer le point où le moment de flexion a la valeur maximale :

Cette valeur est dans le point où $M' = 0$;

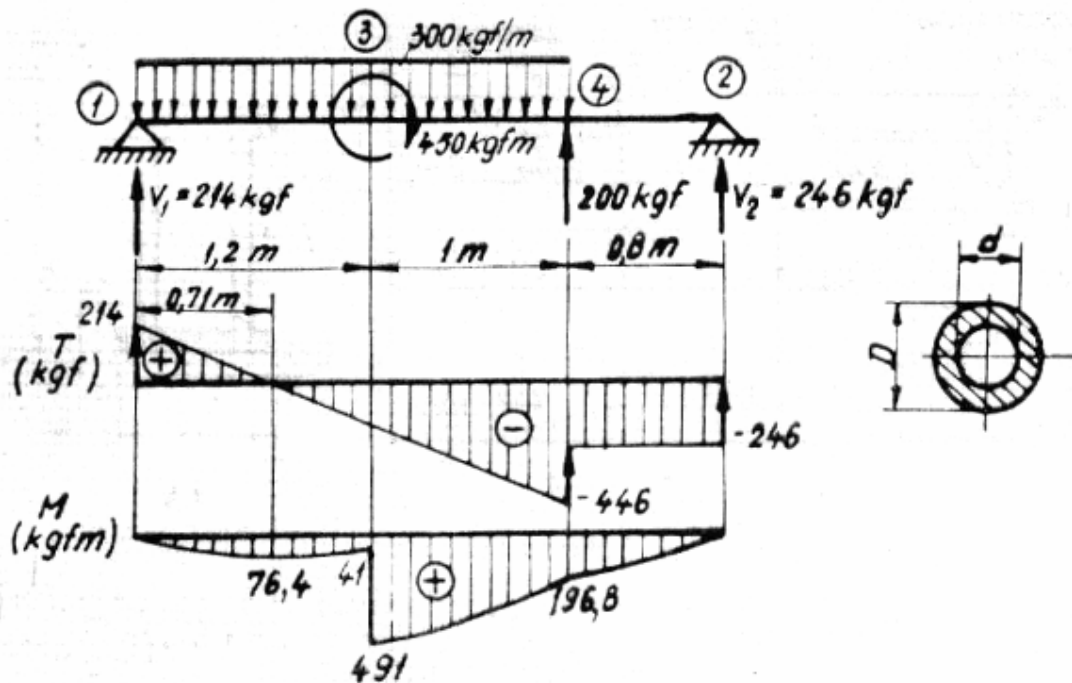
$$M' = 0; (V_1 \times x - q \times \frac{x^2}{2})' = 0;$$

$$V_1 - q \times x = 0;$$

$$x = \frac{V_1}{q} = \frac{214}{300} = 0,71m$$

Pour cette valeur de x on trouve la valeur maximale du moment fléchissant sur la zone 1_2.

$$M_{0,71} = 214 \times 0,71 - 300 \times \frac{0,71^2}{2} = +76,3kgfm$$

Dans le point 3 il faut calculer la valeur du moment de flexion M_3 (pour $x=1,2m$).

$$M_{1,2} = 214 \times 1,2 - 300 \times \frac{1,2^2}{2} = 40,8kgfm$$

Mais dans le point 3 il y a un moment de flexion concentré de sens positif.

$$M_3 = 40,8 + 450 = 490,8kgfm.$$



Pour la zone 3-4

$$M_{3,4} = V_1 \times x - q \frac{x^2}{2} + M_c$$

$$M_4 = 214 \times 2,2 - 300 \frac{2,2^2}{2} + 450 = 470,8 - 726 + 450 = 194,8 \text{ kgfm}$$

Pour la zone 4_2 :

$$M_{4,2} = V_1 \times x - q \times l(x-1,1) + M_c + F_2(x-2,2);$$

Pour l'appui 2 :

$$M_2 = 214,67 \times 3 - 300 \times 2,2(3-1,1) + 450 + 200(3-2,2) = 0;$$

d) Vérification de la poutre de la poutre.

On a constaté que la valeur maximale du moment fléchissant est $M_3 = 490,8 \text{ kgfm} = 4,908 \times 10^4 \text{ kgfcm}$.

Le module de résistance pour l'anneau circulaire (le tube) est $W_z = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32 \times D}$:

$$W_z = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32 \times D} = \frac{\pi(8^4 - 5,5^4)}{32 \times 8} = 39 \text{ cm}^3$$

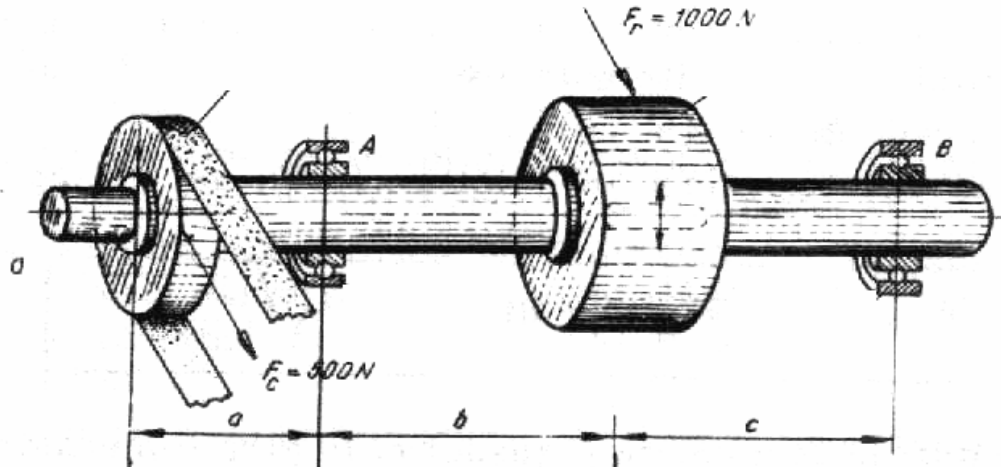
$$\sigma_{\text{effect max}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_z} = \frac{4,908 \times 10^4}{39} = 1260 \text{ kgf / cm}^2$$

Conclusion : la poutre résiste à le charge appliqué :

$$s_{pe} = 1300 \text{ kgf/cm}^2 > s_{\text{effect max}} = 1260 \text{ kgf / cm}^2.$$

**H) Calculs des arbres**

Dimensionner l'arbre de transmission ci-joint sachant que : $P=34 \text{ kW}$; $n=250 \text{ rot/min}$; $a=b=c=250 \text{ mm}$ (acier R0,2=260 MPa) ; $F_c=500 \text{ N}$; $F_r=1000 \text{ N}$ et $\sigma_{af}=100 \text{ MPa}$.

**Solution**

a) Calculs du moment de torsion M_t

$$M_t = 9550P/n = 9550 \times 34 / 250 = 1298,8 \approx 1300 \text{ Nm.}$$

b) Déterminer les réactions dans les appuis R_A et R_B .

$$F_c + F_r = R_A + R_B.$$

$$F_c \times 3a - R_A \times 2a + F_r \times a = 0$$

$$R_A = \frac{F_r \times a + F_c \times 3a}{2a} = \frac{1000 \times 0,25 + 500 \times 0,75}{2 \times 0,25} = 1250 \text{ N}$$

$$R_B = \frac{F_r \times a - F_c \times 3a}{2a} = \frac{1000 \times 0,25 - 500 \times 0,75}{2 \times 0,25} = 250 \text{ N}$$

Calculs des moments fléchissant M_{flexA} sur la direction d'appui A et M_{flexR} sur la direction de la roue dentée

$$M_{flexA} = -F_c \times a = -125 \text{ Nm}$$

$$M_{flexR} = -F_c \times 2a + R_A \times a = +62,5 \text{ Nm}$$

Calculs du moment équivalent M_{echA} sur la direction d'appui A

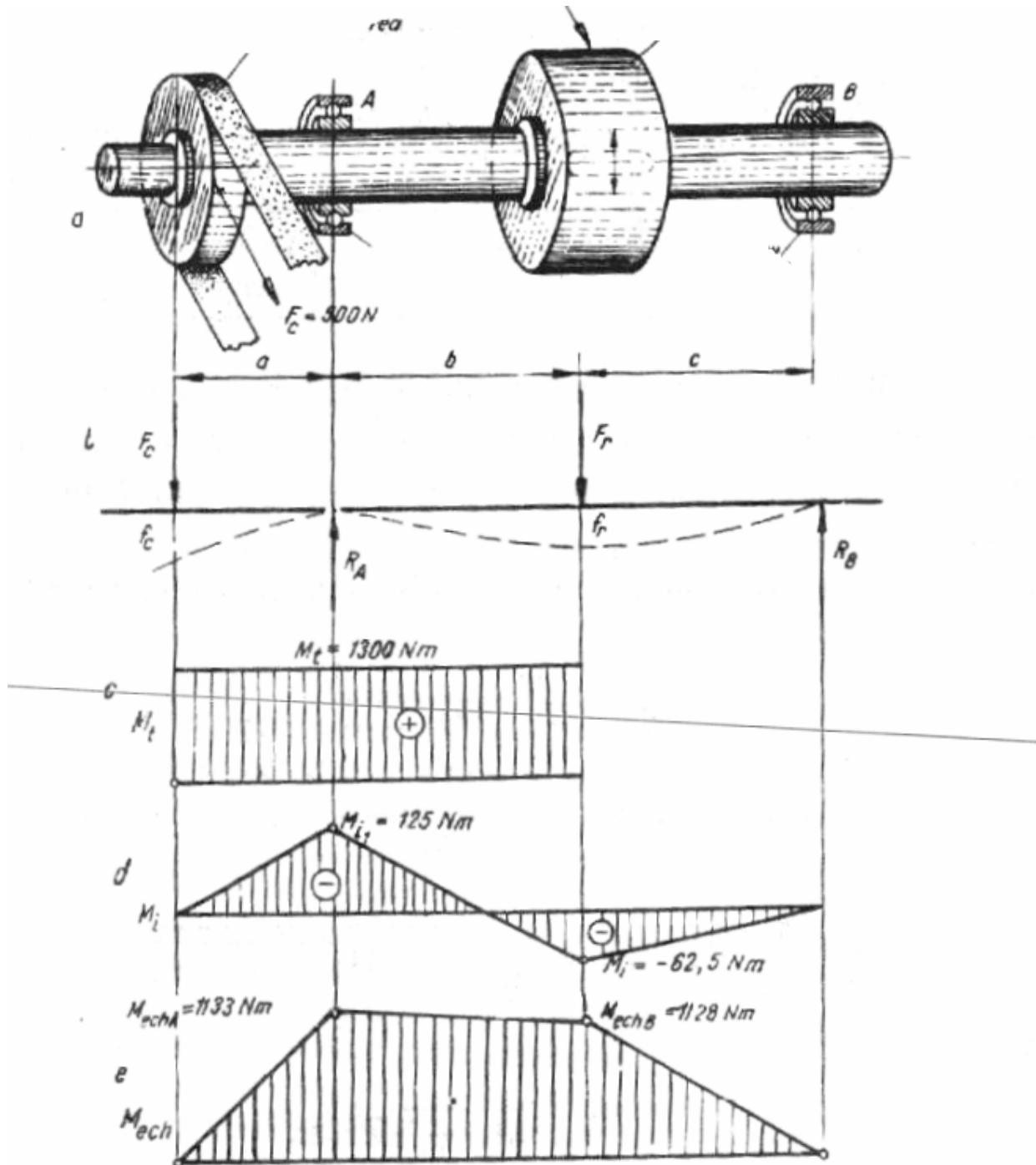
$$M_{echA} = \sqrt{M_{fl}^2 + 0,75M_{tors}^2} = \sqrt{(-125)^2 + 0,75 \times (1300)^2} \approx 1133 \text{ Nm;}$$



Calculs du moment équivalent M_{echR} sur la direction de la roué dentée

$$M_{echR} = \sqrt{M_{fl}^2 + 0,75M_{tors}^2} = \sqrt{(62,5)^2 + 0,75 \times (1300)^2} \approx 1128 Nm$$

Diagramme des efforts tranchants et moments fléchissant





de l'arbre est calculé tenir compte de la section dangereuse (sur la direction d'appui A)

Le dimensionnement de l'arbre est fait pour la flexion tenir compte de M_{ech} .

$$M_{fl} = W \times \sigma_p = \frac{\pi d^3}{32} \sigma_p \approx 0,1 d^3 \sigma_p;$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{10 \times M_{fl}}{\sigma_p}}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{10 \times 1133}{100 \times 10^6}} = 0,04868m = 48,68mm$$

Question N° 1

Soit un acier ayant la résistance pratique à l'extension $\sigma = 140 \text{ MPa}$.

a) Ecrire cette caractéristique en : Pa et en da N/mm²

b) Dimensionner une barre carrée ayant la résistance pratique à l'extension

$\sigma = 140 \text{ MPa}$, sachant que la barre est soumise à l'extension avec une force axiale

$F = 56 \text{ kN}$.

SOLUTION

$$\begin{aligned} \text{a) } \sigma_{pe} &= 140 \text{ MPa} = 140 \times 10^6 \text{ Pa} = 140 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 140 \times 10^5 \text{ dN/m}^2 = \\ &= 140 \times 10^5 \times 10^{-6} \text{ dN/mm}^2 = 14 \text{ dN/mm}^2 \end{aligned}$$

b) $\sigma_{pe} = F/A$: (condition de résistance)

$$A = a^2;$$

$$\sigma_{pe} = 56 \text{ kN/a}^2;$$

$$140 \text{ MPa} = 140 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$140 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 56000 \text{ N/a}^2$$

$$a^2 = 56000 \text{ N} / 140 \times 10^6 \text{ N/m}^2;$$

$$a^2 = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

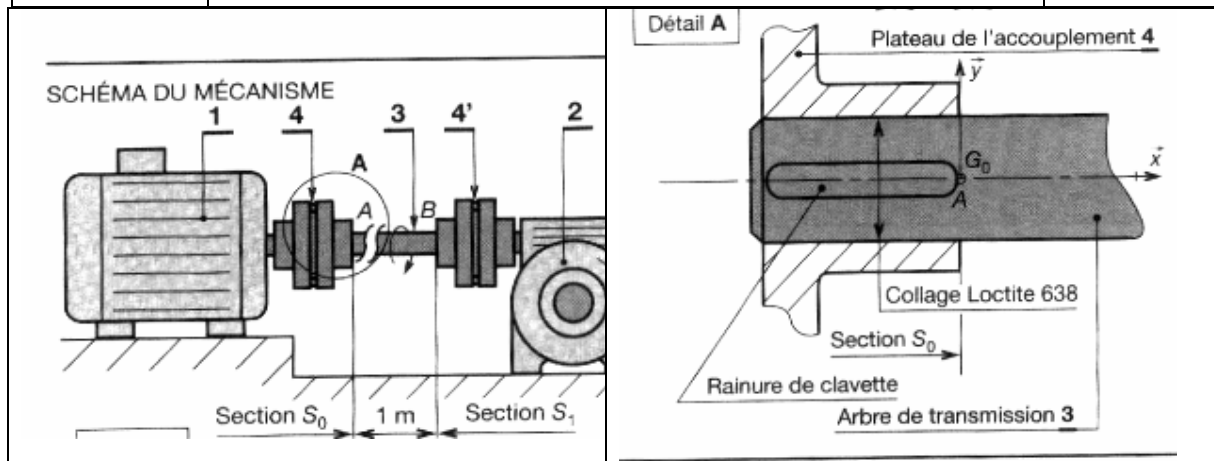
$$a = (4 \times 10^{-4})^{1/2} = 2 \times 10^{-2} \text{ m} = 20 \text{ mm}$$

Question N° 2

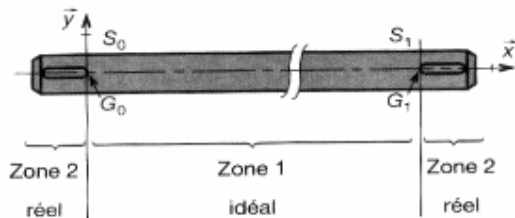
Un moteur électrique **1** transmet à un renvoi d'angle **2** une puissance de 15 kW à la fréquence de rotation $n = 1500 \text{ tr/min}$ par l'intermédiaire d'un arbre de transmission **3** de diamètre d . Ce dernier est lié au moteur et au récepteur par deux accouplements élastiques **4** compensant les défauts d'alignement. La distance séparent les deux accouplements est de 1 m.

La résistance pratique au glissement du matériau de l'arbre est $R_{pg} = 100 \text{ MPa}$, le module d'élasticité transversal est 80000 MPa . Les rainures de clavette nécessitées par la liaison des accouplements élastiques avec l'arbre, provoquent une concentration de contrainte ($K_f = 5,4$).

1) Déterminer le diamètre de l'arbre et calculer l'angle de déformation due à la torsion entre les deux sections S_0 et S_1 .



MODÉLISATION DU SOLIDE

**SOLUTION****Calculer Cm**

Nous savons que : $P = Cm \cdot \omega$; $Cm = P / \omega$
 P (W) ; Cm (N . m) ; ω (rad / s)

$$Cm = (15 \times 10^3) / (1500 \times 2\pi / 60) ; Cm \approx 95,5 \text{ N . m}$$

Calculer le diamètre à la résistance :**Zone 1 : solide idéal**

La condition de résistance est : $\tau_{\max} \leq R_{pg}$

d'où :

$$Mt / (\pi \cdot d_1^4 / 32) \times d_1 / 2 \leq R_{pg} ; 16 Mt / \pi \cdot d_1^3 \leq R_{pg}$$

$$d_1 \geq \sqrt[3]{16 Mt / \pi R_{pg}} \text{ avec } Mt = Cm \text{ (Couple moteur)}$$

$$d_1 \geq \sqrt[3]{(16 \times 95,5 \times 10^3) / \pi \times 100} ; d_1 \geq 16,9 \text{ mm}$$

Zone 2 : solide réel

La condition de résistance est $\tau_{\text{eff max}} \leq R_{pg}$

où : $K_t \cdot \tau_{\text{théorique}} \leq R_{pg}$; $\tau_{\text{théorique}} = Mt / (\pi \cdot d_2^4 / 32) \times d_2' / 2$

avec $\tau_{\text{théorique}} = 16 Mt / \pi \cdot d_2^3$ où d_2' = diamètre à fond de rainure



a condition s'écrit :

3 _____

$$K_t \cdot 16 Mt / \pi \cdot d_2^3 \leq R_{pg} ; d_2' \geq \sqrt[3]{16 K_t \cdot Mt / \pi R_{pg}}$$

3 _____

$$d_2' \geq \sqrt[3]{(16 \times 5,4 \times 95,5 \times 10^3) / \pi \times 100} ; d_2' \geq 29,7 \text{ mm}$$

On prendra pratiquement : $d_2 \approx 30 \text{ mm}$

Calculer l'angle de déformation entre les 2 sections S_0 et S_1

La valeur de l'angle unitaire de torsion est :

$$\Phi = Mt / G \cdot l_0 ; l_0 = \pi d_2^4 / 32 ; \Phi = 32 Mt / G \cdot \pi d_2^4$$

comme $\Phi = \alpha_{0,1} / l_{0,1}$ où : $\alpha_{0,1}$ est l'angle de déformation entre S_0 et S_1
 $l_{0,1}$ est la distance entre S_0 et S_1

On peut écrire :

$$\alpha_{0,1} = 32 \cdot Mt \cdot l_{0,1} / G \cdot \pi d_2^4$$

$$\alpha = 32 \times 95,5 \times 10^3 \times 10^3 / 80000 \times \pi \times 30^4 ; \alpha = 0,015 \text{ rad/mm}$$

Valeur de α en degrés :

$$\alpha = 0,015 \times 180 / \pi ; \alpha = 0,86^\circ$$

Calculer du diamètre de l'arbre à la déformation

La condition de déformation est $\Phi \leq \Phi_{lim}$

$$\text{d'où } Mt / G \cdot l_0 \leq \Phi_{lim} \quad l_0 = \pi \cdot d_3^4 / 32$$

4 _____

$$32 Mt / G \cdot \pi \cdot d_3^4 \leq \Phi_{lim}$$

$$d_3 \geq \sqrt[4]{32 Mt / G \cdot \pi \cdot \Phi_{lim}}$$

$$\Phi_{lim} = 0,2^\circ / m$$

$$\Phi_{lim} = 0,2 \times (\pi / 180) \times 10^{-3} \text{ rad/mm}$$

4 _____

$$d_3 \geq \sqrt[4]{32 \times 95,5 \times 10^3 / 80000 \times \pi \times 0,2 \times (\pi / 180) \times 10^{-3}}$$

$$d_3 \geq 43,2 \text{ mm}$$

On prendra pratiquement : $d_3 = 44 \text{ mm}$

Question N° 3

Un profilé IPN sert de chemin de roulement pour un palan (fig.1). Il est suspendu par 3 tirants de $\varnothing 10$ et de longueur 400mm.

Ces tirants sont en acier de résistance élastique $R_e = 240 \text{ MPa}$, de module de Young : $E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$. Le coefficient de sécurité est $s = 8$. Le tirant le plus chargé supporte une charge verticale de 600 N. L'allongement ne doit pas dépasser 0,5 mm.

1) Vérifier que ce tirant peut supporter cette charge dans des conditions satisfaisantes de sécurité.

2) Vérifier que l'allongement est acceptable.

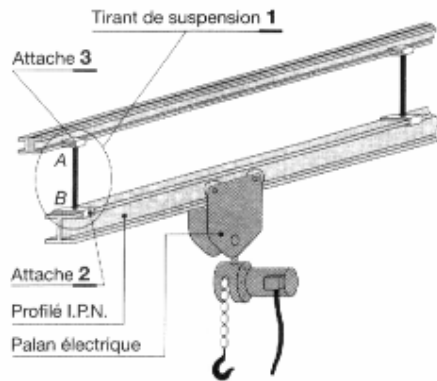
- Pas du filet $p = 1,5 \text{ mm}$; $d_3 = 8,15 \text{ mm}$;

- concentrateur de contrainte au fond du filet

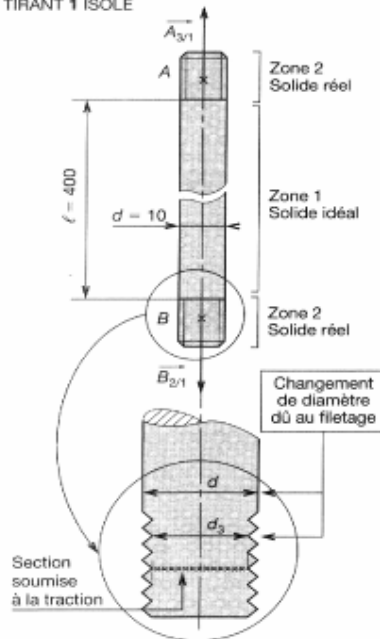
$K_f = 2,5$



SCHEMA DE L'INSTALLATION



TIRANT 1 ISOLÉ

**SOLUTION****1° Vérification de la résistance à la traction****Zone 1 : solide idéal :**

-La contrainte nominale est : $\sigma_{nom} = N/S$;

$N=600N$

-Calculer la surface soumise à la traction et la contrainte

$$S = \pi d^2 / 4 = 78,54 \text{ mm}^2$$

$$D'où \sigma_{nom} = N / S = 600 / 78,54 = 7,64 \text{ MPa}$$

-Calculer la résistance pratique à l'extension, R_{pe} :

$$R_{pe} = R_e / s = 240 / 8 = 30 \text{ MPa}$$

Dans la zone 1 le tirant convient

Zone 2 : solide réel :

-Calculer la surface soumise à la traction :

$$d_3 = d - 1,2268 p ; p=1,5 ;$$

$$d_3 = 8,15 \text{ mm} ; S = \pi d_3^2 / 4 = 52,3 \text{ mm}^2 ;$$

-Calculer la contrainte nominale dans la zone 2 :

$$\sigma_{nom} = 600 / 52,3 = 11,47 \text{ MPa}$$

-Calculer $\sigma_{max} = K_t \times \sigma_{nom} = 2,5 \times 11,47 = 28,68 \text{ MPa}$

-Ecrire la condition de résistance :

$$\sigma_{max} < R_{pe} ; 28,68 < 30.$$

Dans la zone 2, le tirant convient.

2° Calcul de vérification à la déformation ;

$$\Delta l = N \times l_0 / E \times S_0 = 600 \times 400 / 2 \times 10^5 \times 78,65 = 0,015 < 0,5 \text{ (acceptable)}$$

Question 4

La poutre fig.1 est réalisée à partir d'un profilé dont le poids est de 40 daN par mètre.

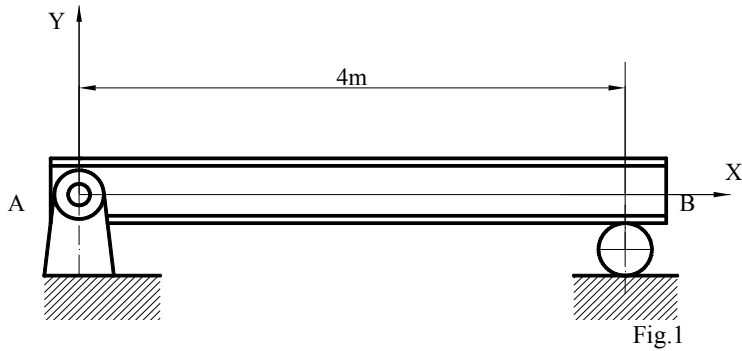
($q=40 \text{ daN m}^{-1}$)

Travail demandé :

a) Calculer les actions aux appuis en A et B.

b) Calculer les efforts intérieurs T_{AB} et M_{fAB}

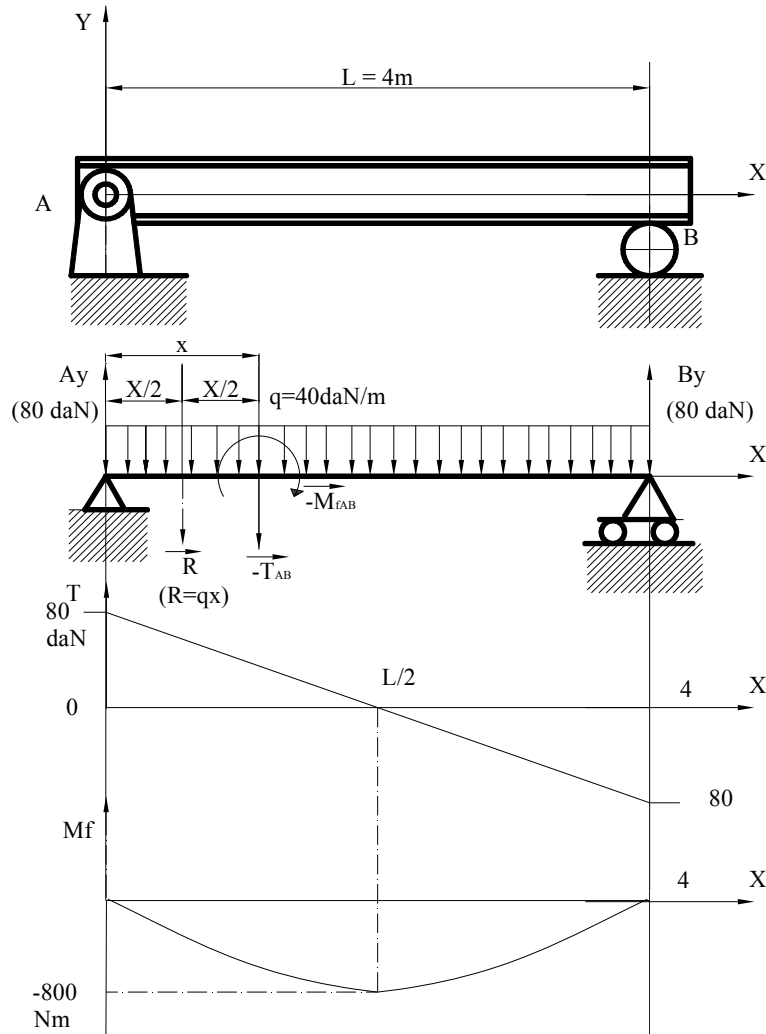
c) Tracer les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissants.



SOLUTION

a)
 $A_y + B_y = qL = 40 \times 4 = 160 \text{ daN}$, par symmetry $A_y = B_y = qL/2 = 80 \text{ daN}$.

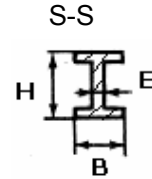
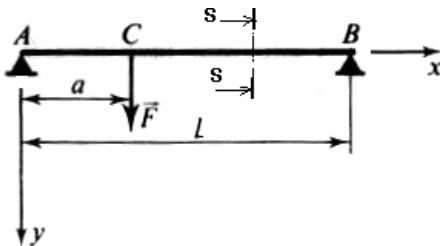
b)
 $T_{AB} = A_y - R = 1/2(qL) - qx = 80 - 40x$;
 $M_{fAB} = -A_y \cdot x + R(x/2) = -(qLx)/2 + q \cdot x^2/2 = qx/2(x-L) = 20x(x-4)$;
 Déterminer M_{fMaxi} :
 $(M_{fAB})' = [20x(x-4)]' = 40x - 80 = 0$; résulte :
 $x = 2 \text{ m} = L/2$; (à $x = L/2 = 2 \text{ m}$ on trouve le moment maximal M_{fMaxi}) ;
 $M_{fMaxi} = - [q L/2] (L/2) + q [(L/2)^2]/2 = -q L^2 / 8 = - 800 \text{ Nm}$.





Question 5

Soit une poutre horizontale dont on néglige le poids. Cette poutre repose sur deux appuis simples A et B et supporte en C une charge verticale $F = 12000 \text{ N}$. ($a=1\text{m}$; $l=4\text{m}$)

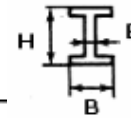


Questions :

- a) Déterminer les réactions des appuis simples A et B. ;
- b) Construire le diagramme des efforts tranchants et des moments de flexions dans la poutre AB.
- c) La poutre est en acier de $Re = 400 \text{ N/mm}^2$. On adopte un coefficient de sécurité $k = 5$. Déterminer les dimensions optimales de la poutre (H ; B ; E).

La section de la poutre (S-S) est la suivante - Profile I_{PN} :
On donne $H = 10E$; $B = 5E$.

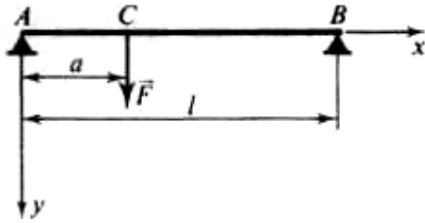
Utiliser le tableau ci-dessous :



Choix de l'axe de calcul :	Dimensions (mm)				Sections (cm ²)	Masses linéiques (kg/m)	Moments quadratiques (cm ⁴)		Modules de flexion (cm ³)		Rayons de giration (cm)	
	H	B	E	E'			I_{Gx}	I_{Gy}	$\frac{I_{Gx}}{v_x}$	$\frac{I_{Gy}}{v_y}$	r_x	r_y
① Prendre les valeurs relatives à l'axe Gx	80				7,58	5,95	77,8	6,29	19,5	3,00	3,20	0,91
	100				10,6	8,32	171	12,2	34,2	4,88	4,01	1,07
	120				14,2	11,2	328	21,5	54,7	7,41	4,81	1,23
	140				18,3	14,4	573	35,2	81,9	10,7	5,61	1,40
	160				22,8	17,9	935	54,7	117	14,8	6,40	1,55
	180				27,9	21,9	1 450	81,3	161	19,8	7,20	1,71
	200				33,5	26,3	2 140	117	214	26,0	8,00	1,87
	220				39,6	31,1	3 060	162	278	33,1	8,80	2,02
	240				46,1	36,2	4 250	221	354	41,7	9,59	2,20
	260				53,4	41,9	5 740	288	442	51,0	10,4	2,32
	280				61,1	48,0	7 590	364	542	61,2	11,1	2,45
	300				69,1	54,2	9 800	451	653	72,2	11,9	2,56
	320				77,8	61,1	12 510	555	782	84,7	12,7	2,67
	340				86,8	68,1	15 700	674	923	98,4	13,5	2,80
360				97,1	76,2	19 610	818	1 090	114	14,2	2,90	
400				118	92,6	29 210	1 160	1 460	149	15,7	3,13	
450				147	115	45 850	1 730	2 040	203	17,7	3,48	
500				180	141	68 740	2 480	2 750	268	19,6	3,72	



SOLUTION



La section de la poutre est la suivante :

a) Réactions des appuis simples A et B. ;

En projection sur Y : $F - R_A - R_B = 0$

Moments par rapport à A : $R_B \times l - F \times a = 0$

D'où : $R_B = F \times a/l = 3000\text{N}$; $R_A = F \times (1 - a/l) = 9000\text{N}$.

b) Le diagramme des efforts tranchants et des moments de flexions.

Efforts tranchants :

Zone AC ; $T_{AC} = - R_A = -9000\text{N}$

En C ; $T_C = - 9000 + 12000 = 3000\text{N}$

Moments de flexions :

Zone AC ; $M_f = 9000 \times X$

En C ; $M_{f\max} = 9000 \times a = 9000\text{Nm}$

Tracer les diagrammes.

c) La poutre est en acier de $R_e = 400 \text{ N/mm}^2$. On adopte un coefficient de sécurité $k = 5$. Déterminer les dimensions de la poutre (h ; b ; e).

On donne $H = 10E$; $B = 5E$.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_f}{W_z}$$

$$\sigma_{\max} = R_p = \frac{400}{5} = 80 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\text{Module de flexion} = \frac{I_{Gx}}{V_x} = 9000 \times 1000 / 80 = 112500\text{mm}^3 = 112.5 \text{ cm}^3$$

On prend du tableau le Module de flexion $\frac{I_{Gx}}{V_x}$ supérieur à 112.5 cm^3 .

$$\frac{I_{Gx}}{V_x} = 117 \text{ cm}^3, \text{ qui corresponde au profile } I_{PN} 160.$$

Donc $I_{PN} 160$; $H=160\text{mm}$; $E=16\text{mm}$; $B=80\text{mm}$

Question 6

Poutre droite à section constante encastree en B, libre en A, chargée uniformément de A en B (taux de charge p). (Voir Fig.3)

Déterminer :

1. Réactions d'appui : R_B , M_B .
2. Effort tranchant $T_{(x)}$.
3. Moment de flexion $M_{f(x)}$.
4. $y(x)$, flèche maximale : f_{\max} ;
5. Contrainte maximale σ_{\max}

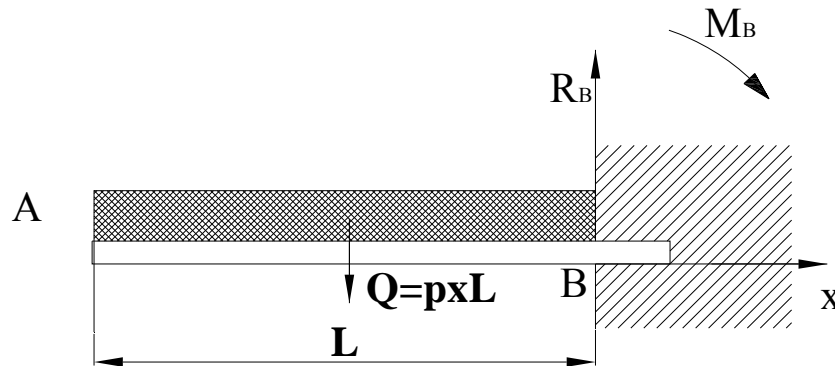


Fig.3

Application numérique :

Section tubulaire : $\Phi_{ext.}=219\text{mm}$, épaisseur $e=5,9\text{mm}$.

Résistance pratique $R_p=160\text{ N/mm}^2$

$E=2,1 \times 10^4\text{ N/mm}^2$.

$Q=2 \times 10^4\text{ N}$.

$L=3\text{m}$.

SOLUTION

1. Reactions d'appuis

Charge totale : $Q=p \times L$

Les inconnues : R_A et M_B .

Equations d'équilibre :

$-Q+R_B=0$; résulte : $R_B=Q=2 \times 10^4\text{ N}$;

Moment par rapport à B :

$(Q \times L)/2 - M_B=0$; résulte : $M_B=(Q \times L)/2=p(L^2)/2=(2 \times 10^4 \times 3)/2=3 \times 10^4\text{ Nm}$;

2. Effort tranchant $T(x)$

$T(x)=-px$; $T_A=0$; $T_B=-pL=-2 \times 10^4\text{ N}$;

3. Moment fléchissant $M(x)$

$$M(x)=p(x^2)/2 ;$$

En A : $M_{(A)}=0$; En B : $M_{(B)}=p(L^2)/2=3 \times 10^4\text{ Nm}$;

4. Ligne élastique déformée $y(x)$

$y''=-M_f/EI$; avec $M_f=(px^2)/2$; résulte : $y''=-px^2/2EI$;

Posons $-(p/2)EI=A$ résulte : $y''=Ax^2$;

Intégrons une première fois :

$$y'=A(x^3)/3+C_1 ;$$

Intégrons une seconde fois :

$$y=A(x^4)/12+C_1x+C_2 ;$$

$$y=(-p/24EI)x^4+(p/24EI)L^3x-(p/8EI)L^4 ;$$

La flèche maximale est pour $x=0$;

$$y_{\max}=-p/8EI L^4$$

$$Q=2 \times 10^4\text{ N} ; L=300\text{cm} ; I=\pi/64(21,9^4-20,72^4)=2244\text{ cm}^4 ; E=21 \times 10^6\text{ N/cm}^2 ;$$

$$y_{\max}=-p/8EI L^4=-(Q/8EI)L^3=-(2 \times 10^4 \times 3^3 \times 10^6)/(8 \times 21 \times 10^6 \times 22,44 \times 10^2)=-1,46\text{ cm} ;$$

5. Contrainte maximale σ_{\max}

$$M_{\max}=QL/2=(2 \times 10^4 \times 3)/2=3 \times 10^4\text{ Nm} ;$$

$$I=\pi/64(21,9^4-20,72^4)=2244\text{ cm}^4$$

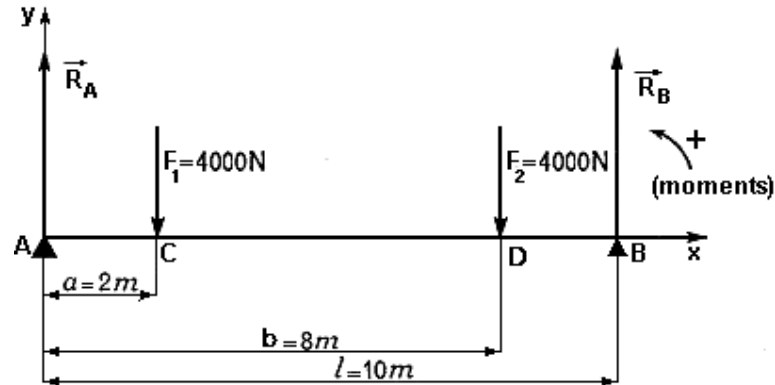
$$v=21,9/2=10,95\text{ cm}.$$

$$I/v=2244/10,95=205\text{ cm}^3 ;$$

$$\sigma_{\max}=M_{\max}/(I/v)=3 \times 10^4\text{ Nm}/205\text{ cm}^3=(3 \times 10^4 \times 10^3\text{ N mm})/(205 \times 10^3\text{ mm}^3)=146,3\text{ N/mm}^2.$$

**Question 7**

On donne la poutre représentée par la figure ci dessous :



- Déterminer les actions de contact (R_A et R_B) en A et B.
- Déterminer les équations des efforts tranchants $T(x)$ et des moments fléchissant $M_f(x)$
- Tracer Les diagrammes des efforts tranchants $T(x)$ et des moments fléchissant $M_f(x)$.

SOLUTION**a) Calcul des actions de contact en A et B.**

L'utilisation des deux conditions d'équilibre donne immédiatement :

$$R_A = R_B = 4000 \text{ N.}$$

b) $T(x)$

Entre A et C, $T = R_A = 4000 \text{ N.}$

Entre C et D, $T = R_A - F_1 = 0 \text{ N.}$

Entre E et B, $T = R_A - F_1 - F_2 = -4000 \text{ N.}$

Cette expression est représentée par la figure ci-dessous :

 $M(x)$

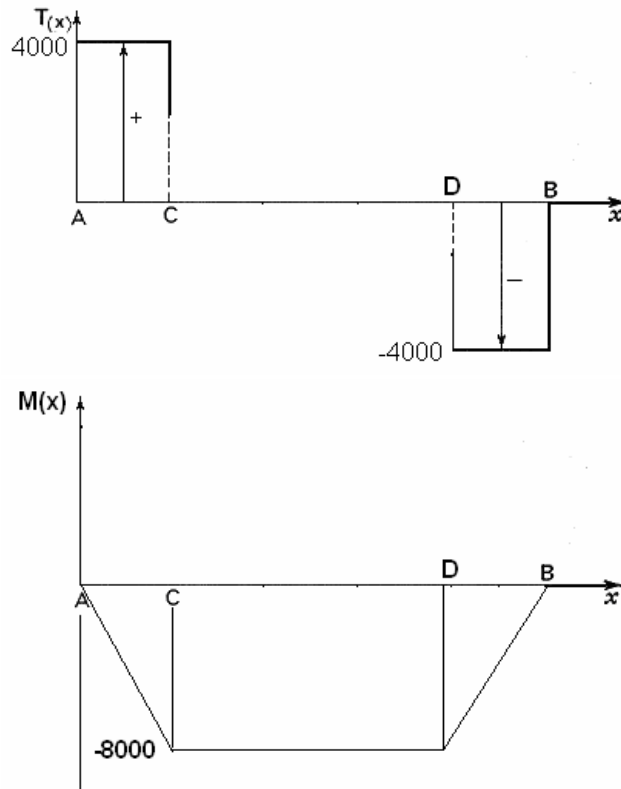
Entre A et C, $M = -R_A x = -4000 x.$

Entre C et D, $M = -R_A x + F_1 (x-a) = -4000 a = -8000 \text{ Nm.}$

Entre E et B, $M = -R_A x + F_1 (x-a) + F_2 (x-b) = 4000(x-l).$



c) Diagrammes



Question 8

I. Un élément AB de machine est constitué de deux pièces cylindriques coaxiales un cylindre plein [1] en acier, de section constante S_1 et de module d'élasticité E_1 un cylindre creux [2] en duralumin (alliage d'aluminium), de section constante S_2 et de module d'élasticité E_2 . Leur longueur commune est L (fig. 1).

Une charge F est appliquée à cet ensemble, entre les plateaux P1 et P2. Le poids propre des cylindres est négligeable devant les autres forces. Le flambement n'est pas possible.

1. Calculer les contraintes normales respectives σ_1 dans le cylindre [1], σ_2 dans le cylindre creux [2].
2. Calculer le raccourcissement ΔL de l'ensemble AB.

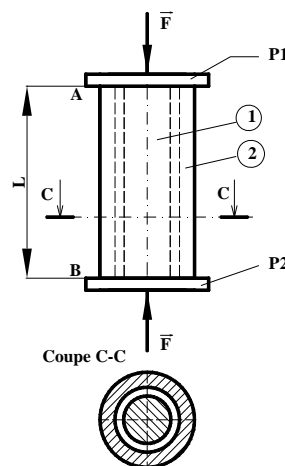


Fig.1.



Application numérique

Cylindre [1] (acier)

$$E_1 = 20 \times 10^3 \text{ daN/mm}^2, \text{ soit } 20 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$$

$$S_1 = 500 \text{ mm}^2 \text{ (d=25 mm)}$$

$$R_{e1} = 400 \text{ N/mm}^2.$$

Cylindre [2] (duralumin)

$$S_2 = 200 \text{ mm}^2$$

$$E_2 = 7 \times 10^3 \text{ daN/mm}^2, \text{ soit } 7 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$$

$$R_{e2} = 260 \text{ N/mm}^2.$$

$$L = 250 \text{ mm}; F = 50 \times 10^3 \text{ N}.$$

SOLUTION

1. Calcul des contraintes normales σ_1 et σ_2 de compression.

AB est soumis à la compression simple.

Une section droite quelconque entre AB admettra toujours comme réduction,

$$N = F.$$

Par ailleurs, toutes les sections droites sont identiques.

Faisons une section droite et essayons de calculer σ_1 et σ_2 .

$$\text{On a (équation d'équilibre) : } \sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2 = F. \quad (1)$$

1 équation, 2 inconnues : σ_1 et σ_2 . La statique ne peut pas nous donner d'autres équations. Il faut donc faire appel à l'équation de déformation

$$\Delta L = \sigma L / E$$

Ici, le ΔL est le même pour les deux pièces (1) et (2), d'où :

$$\Delta L = \sigma_1 L / E_1 = \sigma_2 L / E_2$$

D'où :

$$\sigma_1 / E_1 = \sigma_2 / E_2$$

$$\text{Ou } \sigma_1 / \sigma_2 = E_1 / E_2 \quad (2)$$

Nous avons maintenant un système résoluble de deux équations (1) et (2) inconnues : σ_1 et σ_2

$$\sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2 = F. \quad (1)$$

$$\text{Ou } \sigma_1 / \sigma_2 = E_1 / E_2 \quad (2)$$

En multipliant les deux membres de (2) par S_1/S_2 pour faire apparaître les termes de (1) et en utilisant une propriété des rapports, (2) devient :

$$\frac{\sigma_1 S_1}{\sigma_2 S_2} = \frac{E_1 S_1}{E_2 S_2}$$

D'où :

$$\frac{\sigma_1 S_1}{\sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2} = \frac{E_1 S_1}{E_1 S_1 + E_2 S_2} \quad (2')$$

En utilisant :

$$\sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2 = F. \quad (1)$$

On tire de (2')

$$\sigma_1 = F \times \frac{E_1}{E_1 S_1 + E_2 S_2}$$

Par symétrie :

$$\sigma_2 = F \times \frac{E_2}{E_1 S_1 + E_2 S_2} \text{ ou : } \sigma_2 = \sigma_1 \times E_2 / E_1.$$

Application numérique (m et N)

$$F = 50 \times 10^3 \text{ N} = 5 \times 10^4 \text{ N}$$

$$E_1 = 20 \times 10^4 \text{ N/mm}^2 = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$E_2 = 7 \times 10^4 \text{ N/mm}^2 = 0,7 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$S_1 = 500 \text{ mm}^2 = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$S_2 = 200 \text{ mm}^2 = 2 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

σ_1 et σ_2 sont des contraintes de compression (négatives par convention).



$$\sigma_1 = -5 \times 10^4 \times \frac{20 \times 10^4}{2 \times 10^{11} \times 5 \times 10^{-4} + 0,7 \times 10^{11} \times 2 \times 10^{-4}} = -\frac{10^8}{1,14}$$

$$\sigma_1 = -0,877 \times 10^8 \text{ N/m}^2 = -87,7 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 \times E_2/E_1 = -30,7 \text{ N/mm}^2$$

2. Calcul du raccourcissement

L'équation de déformation donne immédiatement

$$\Delta L = \sigma_1 L/E_1 \text{ ou } \Delta L = \sigma_2 L/E_2$$

Application numérique.

$$\Delta L = -87,7 \text{ [N/mm}^2] \times 250 \text{ [mm]} / 20 \times 10^4 \text{ [N/mm}^2] = -0,109 \text{ mm}$$

Liste des références bibliographiques.

Ouvrage	Auteur	Edition
Cours de Mécanique	G.BUHOT/P.THILIER	MASSON 1986
Mécanique Classique	P.AGAFI/N.MATTERA	DURRANDE 1987

NB : Outre les ouvrages, la liste peut comporter toutes autres ressources jugées utiles (Sites Internet, Catalogues constructeurs, Casette)