OFPPT

ROYAUME DU MAROC

مكتب التكوين المهني وإنعاش الشغل

Office de la Formation Professionnelle et de la Promotion du Travail
Direction Recherche et Ingénierie de la Formation

RÉSUMÉ THÉORIQUE
&
GUIDE DE TRAVAUX PRATIQUES

MODULE 22 : MATHEMATIQUES ET MECANIQUE APPLIQUEES

Secteur : **FABRICATION MÉCANIQUE**

Spécialité : **T.F.M.**

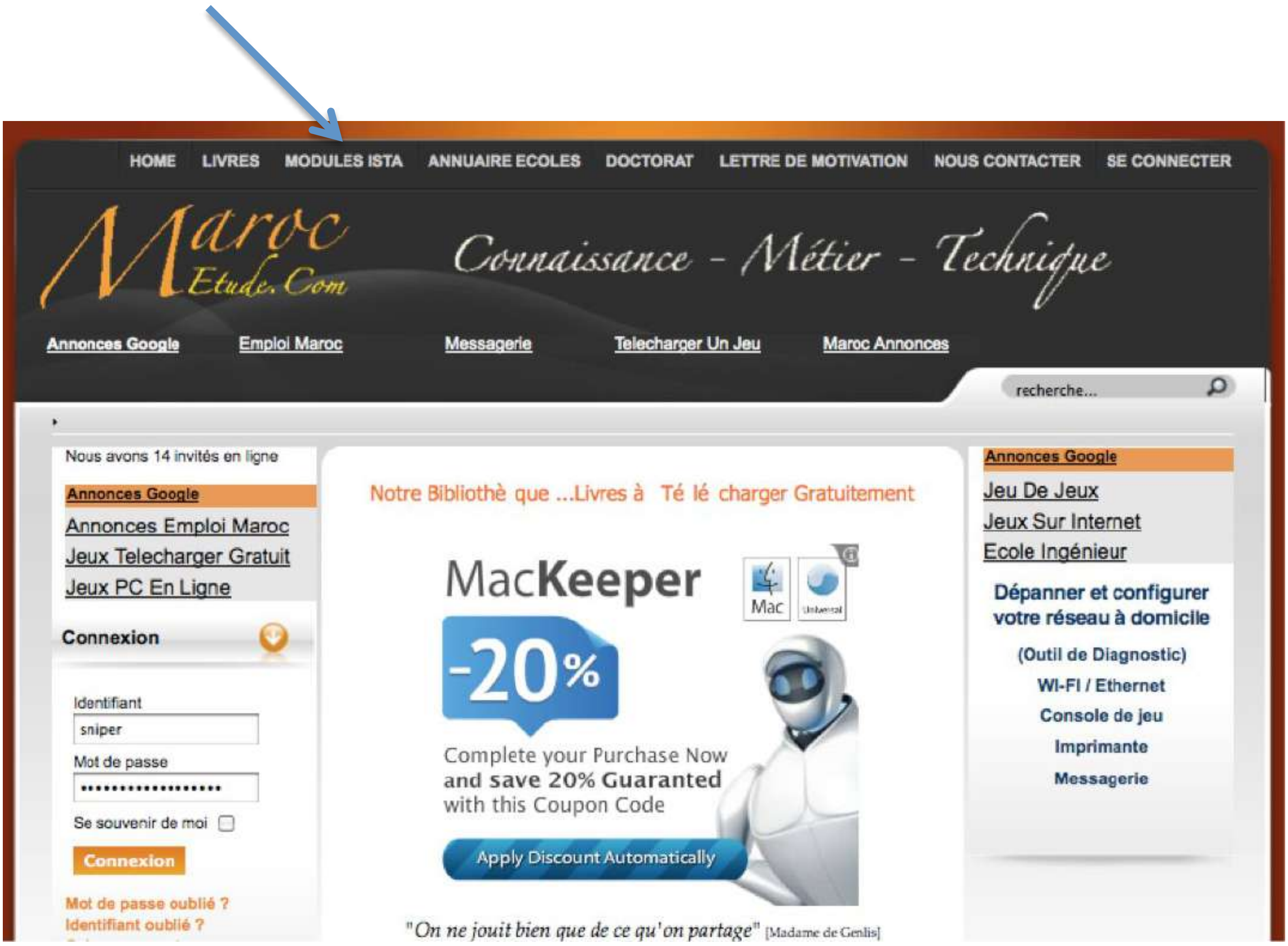
Niveau : **Technicien**

PORTAIL DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE AU MAROC

Télécharger tous les modules de toutes les filières de l'OFPPT sur le site dédié à la formation professionnelle au Maroc : **www.marocetude.com**

Pour cela visiter notre site www.marocetude.com et choisissez la rubrique :

MODULES ISTA



Document élaboré par :

Nom et prénom	*EFP*	
FLOREA FLORIAN	***CDC Génie Mécanique***	***DRIF***
EL HAJIOUI HASSAN	***ISTA- GM***	***DRGC***

Révision linguistique

-
-
-

Validation

-
-
-

SOMMAIRE

MODULE 22 : MATHEMATIQUES APPLIQUEES A LA FABRICATION MECANIQUE

Code : **Durée : 54 h**

OBJECTIF OPÉRATIONNEL DE PREMIER NIVEAU

DE COMPORTEMENT

COMPORTEMENT ATTENDU

Pour démontrer sa compétence le stagiaire doit ***résoudre des problèmes de mathématiques appliqués à la fabrication mécanique,***

selon les conditions, les critères et les précisions qui suivent.

CONDITIONS D'ÉVALUATION

- Travail individuel
- A partir
  - D'un plan d'ensemble
  - D'un plan de définition
  - De documents et revues techniques
  - De devis
  - D'opérations d'usinage relatives aux compétences particulières
  - D'opérations de contrôle relatives aux compétences particulières
  - De préparations de travaux d'ateliers relatives aux compétences particulières
- À l'aide :
  - Formulaires, abaques et diagrammes
  - Calculatrice

CRITÈRES GÉNÉRAUX DE PERFORMANCE

- Analyse du problème
- Méthode de travail
- Unités de grandeur
- Précision et exactitude des calculs
- Traçabilité du travail

OBJECTIF OPÉRATIONNEL DE PREMIER NIVEAU DE COMPORTEMENT(suite)

PRÉCISIONS SUR LE COMPORTEMENT ATTENDU	CRITÈRES PARTICULIERS DE PERFORMANCE
A. Comprendre l'objectif avant de résoudre le problème	- Identification du but à atteindre - Recherche des informations - Interprétation et choix des données
B. Déterminer une méthode de calcul	- Structuration de la méthode - Logique de la démarche
C. Effectuer des calculs de mathématiques appliqués au domaine de la fabrication mécanique: • Ajustage et assemblage • Usinage • Mesure et contrôle • Prix de revient industriel	- Coût de production - Cinématique de machines - Paramètres de coupe - Transfert de cote, de sur-épaisseur - Cotation; tolérances, jeux - Paramètres de suivi de fabrication (carte de contrôle)
D. Vérifier son résultat.	- Vérification de son calcul - Qualité des données - Fiabilité du résultat : • Ordre de grandeur • Justesse
E. Rendre compte par écrit.	- Propreté, clarté, et lisibilité. - Qualité des commentaires, explications et observations.

OBJECTIFS OPÉRATIONNELS DE SECOND NIVEAU

LE STAGIAIRE DOIT MAÎTRISER LES SAVOIRS, SAVOIR-FAIRE, SAVOIR PERCEVOIR OU SAVOIR ÊTRE JUGÉS PRÉALABLES AUX APPRENTISSAGES DIRECTEMENT REQUIS POUR L'ATTEINTE DE L'OBJECTIF DE PREMIER NIVEAU, TELS QUE :

Avant d'apprendre à comprendre l'objectif avant de résoudre le problème (A)

1. Connaître les termes se rapportant à la mécanique industrielle

Avant d'apprendre à déterminer une méthode de calcul (B) :

2. Connaître certains principes de mathématiques en mécanique industrielle
3. Se soucier des choix des formules et de la précision des réponses
4. Se soucier de la propreté et de la présentation des solutions

Avant d'apprendre à effectuer des calculs de mathématiques appliquées au domaine de la fabrication mécanique (C) :

5. Savoir utiliser une calculatrice
6. Connaître les formules de trigonométrie, surfaces, volumes,...
7. Savoir effectuer des calculs en géométrie

Avant d'apprendre à vérifier son résultat (D) :

8. Se soucier de la fiabilité de la méthode
9. Se soucier de l'importance de l'information à transmettre (résultat)

Avant d'apprendre à rendre compte par écrit (E) :

10. Être capable de transcrire des informations, des commentaires
11. Se soucier de la précision des informations recueillies ou transcrites

MODULE 22 : MATHEMATIQUES APPLIQUEES A LA FABRICATION MECANIQUE

Code :	Théorie :	65 %	35 h
Durée : 54 heures	Travaux pratiques :	31 %	17 h
Responsabilité : D’établissement	Évaluation :	4 %	2 h

OBJECTIF OPERATIONNEL DE PREMIER NIVEAU
DE COMPORTEMENT

COMPETENCE

- **Résoudre des problèmes de mathématiques appliqués à la fabrication mécanique.**

PRESENTATION

Ce module de compétence générale se dispense dans les premières semaines du premier semestre du programme de formation. Ce module est préalable à tous les modules de compétences à caractère mécaniques.

DESCRIPTION

L’objectif de ce module est de faire acquérir les connaissances liées au dessin, traçage de croquis, à main levée en projection orthogonale ou isométrique, représentés à l’aide des lignes conventionnelles du dessin technique et au traçage de schémas. Il vise donc à rendre le stagiaire apte à tracer et lire des croquis et des schémas.

CONTEXTE D’ENSEIGNEMENT

- A l’aide d’exemples appropriés, faire ressortir les raisons pour lesquelles les dessins, le traçage de croquis et de schémas est essentiel à l’exercice du métier en usinage mécanique.

CONDITIONS D’EVALUATION

- Travail individuel
- A partir :
  - D'un plan d'ensemble
  - D'un plan de définition
  - De documents et revues techniques
  - De devis
  - D'opérations d'usinage relatives aux compétences particulières
  - D'opérations de contrôle relatives aux compétences particulières
  - De préparations de travaux d'ateliers relatives aux compétences particulières
- À l’aide :
  - Formulaires, abaques et diagrammes
  - Calculatrice

OBJECTIFS	ELEMENTS DE CONTENU
1. Connaître les termes se rapportant à la mécanique industrielle	- Termes et mots techniques - Lecture et compréhension d'exercices et problèmes posés
A. Comprendre l'objectif avant de résoudre le problème	- But d'un exercice - Informations complémentaire - Données et hypothèses d'un problème - Les points à déterminer - Etablissement des équations - Choix de la méthode de résolution
2. Connaître certains principes de mathématiques en mécanique industrielle	- Calcul de vitesse de rotation en utilisant les formules mathématiques
3. Se soucier des choix des formules et de la précision des réponses	- Les erreurs (de calcul ou du choix de formule) - Impact d'une erreur mathématique dans la réalisation des pièces mécaniques
4. Se soucier de la propreté et de la présentation des solutions	- Clarté - Démonstration - Argumentation et justification des solutions
B. Déterminer une méthode de calcul	- Réalisation des logiques opérationnel - Conditions de suites logiques - Définition des variables - Calculs sous forme littérale
5. Savoir utiliser une calculatrice	- Fonctions - Types - Utilisation des différentes touches : • Addition • Soustraction • Multiplication • Division • Racine carrée - Mise en mémoire - Correction (touche d'effacement)
6. Connaître les formules de trigonométrie, surfaces, volumes,...	- Eléments de base de la géométrie : • Les triangles et leurs particularités • Les polygones • Les cercles • Les volumes - Les cercles trigonométriques, sinus, cosinus,…
7. Savoir effectuer des calculs en géométrie	- Les conversions dans les unités - Divisibilités des nombres : • P.P.C.M. • P.G.C.D. - La règle de 3 - Théorème de Thalès

C. Effectuer des calculs de mathématiques appliqués au domaine de la fabrication mécanique: • **Ajustage et assemblage** • **Usinage** • **Mesure et contrôle** • **Prix de revient industriel** 8. Se soucier de la fiabilité de la méthode 9. Se soucier de l'importance de l'information à transmettre (résultat) **D. Vérifier son résultat.** 10. Etre capable de transcrire des informations, des commentaires 11. Se soucier de la précision des informations recueillies ou transcrites **E. Rendre compte par écrit.**	- Calcul de : • Coût de production • Cinématique de machines • Paramètres de coupe • Transfert de cote, de surépaisseur • Cotation; tolérances, jeux • Paramètres de suivi de fabrication (carte de contrôle) - Notion d'erreur et incertitude - Choix d'une méthode de mesure en fonction de la précision demandée - Rapport de contrôle appui par des notes de calculs - Vérification de son calcul - Qualité des données - Fiabilité du résultat : • Ordre de grandeur • Justesse - Rapport, compte rendue et note d'information - Précision des informations recueillis ou transcrites - Propreté, clarté, et lisibilité. - Qualité des commentaires, explications et observations.

I. VOCABULAIRE DE MATHÉMATIQUE

Notations et Symboles	
Symbole	**Définition**
$\forall$	quel que soit
$\exists$	il existe
$\Rightarrow$	implique
$\Leftrightarrow$	équivalent à (= ssi : si et seulement si)
$\stackrel{def}{=}$	égal à, par définition
ie	c'est-à-dire

1. Notions relatives aux ensembles

1.1 Ensembles

Si on désigne par E un ensemble, x un élément de E, x est aussi appelé point ; on écrit :

$x \in E$ x appartient à E ;

$x \notin E$ x n'appartient pas à E ;

$\{x \in E, P\}$ ensemble des éléments x de E, ayant la propriété P (la virgule peut être remplacée par / ou par ;) ;

$F \subset E$ F partie (sous-ensemble de E) contenue dans E ; tout élément x de F est élément de E : $\forall\ x \in F \Leftrightarrow x \in E$;

$\subset$ est dite l'inclusion ;

$\varnothing$ ensemble vide.

$(Ai)i \in I$ une famille (quelconque) de sous-ensembles de E ;

on note :

$A1 \cup A2$ l'union de A1 et A2, ie l'ensemble des éléments qui appartiennent à A1 ou (non exclusif) à A2 ;

$A1 \cap A2$ l'intersection de A1 et A2 , ie l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A1 et à A2 ;

$\cup$ L'union de la famille $Ai = \{x \in E,\ \exists\ i \in I$ tel que $x \in Ai\}$;

$\cap$ L'intersection de la famille $Ai = \{x \in E, x \in Ai ; \forall\ i \in I\}$

2. Notions relatives aux nombres

2.1 Principaux ensembles de nombres

N ; ensemble des entiers naturels : {0, 1, 2, ...} ;
Z ; ensemble des entiers relatifs {..., – 2, – 1, 0, 1, 2, ...} ;
Q ; ensemble des nombres rationnels, ie ensemble des fractions : **p/q** avec **p** et **q** $\in$Z
R ; ensemble des nombres réels ;
N, Z, Q, R ; sont des ensembles ordonnés pour la relation ≤;
C ; ensemble des nombres complexes ;

On utilise aussi souvent les ensembles suivants :

$\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\} = \{1, 2, ...\}$

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$

$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}\backslash\{0\}$

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$

$\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q},\ x \geqslant 0\}$

$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0\}$

2.2 Intervalles en R :

$[a, b]$	fermé $= \{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x \leqslant b\}$
$]a, b[$	ouvert $= \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$
$[a, b[$	semi-ouvert à droite $= \{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x < b\}$
$]a, b]$	semi-ouvert à gauche $= \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leqslant b\}$

On désigne parfois par (a, b) l'ensemble des nombres réels compris entre a et b, bornes comprises ou non (à ne pas confondre avec le couple (a, b)).

2.3. Notation dans C

Soit $z \in \mathbb{C}$ (un nombre complexe) ; on note :

$$z = x + \mathrm{i}y,\ \mathrm{i} = \sqrt{-1}$$

avec	$x = \mathrm{Re}\, z$	la partie réelle de z,
	$y = \mathrm{Im}\, z$	la partie imaginaire de z,
	$\rho = \lvert z \rvert$	le module de z ; $\lvert z \rvert = (x^2 + y^2)^{1/2}$,
	$\theta = \mathrm{Arg}\, z$	l'argument de z, défini par : $z = \lvert z \rvert \exp(\mathrm{i}\,\theta)$,
	$\bar{z}$	le complexe conjugué de z, donc $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$.

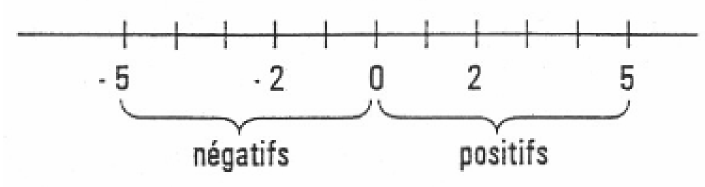
II. ARITHMÉTIQUE

1. Les nombres relatifs (Z)

Comparaison de deux nombres relatifs.

• On peut graduer une droite avec des nombres relatifs.

Il est alors facile de comparer deux nombres relatifs.



• Comparaison de deux nombres de même signe

Exemple : 2 < 5; -5 <-2

• Comparaison de deux nombres de signes contraires

Exemple :-2 < 5; -5< 2 ; le plus petit est le négatif.

Addition

• Somme de deux nombres de même signe

Exemple :(+ 5) + (+3) = + 8; (- 5) + (-3) = -8

• Somme de deux nombres de signes contraires

Exemple :(+ 5) + (-3) = + 2; (- 5) + (+3) = -2

Opposés

Deux nombres relatifs sont opposés si leur somme est égale à zéro.

Exemple : -2 est l'opposé de 2; 3 est l'opposé de -3.

Soustraction

Pour soustraire on ajoute l'opposé.

Exemple : (+ 5) - (+ 3) = (+5) + (- 3) = 2 ; (+ 5)- (-3) = (+ 5) + (+ 3) = 8

Exercices :

Effectuer les additions suivantes :

(+ 28) + (+67) =

(- 28) + (- 67) =

(-28) + (+ 67) =

(+28) + (-67) =

Effectuer les soustractions suivantes :

(+ 35)-(+61) =

(-35)-(-61) =

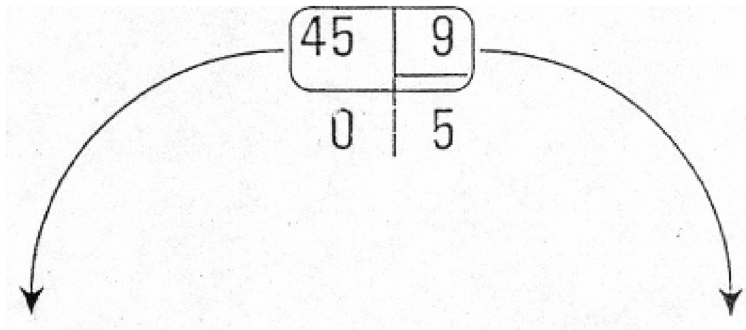
(-108)- (+76) =

(+76) - (-108) =

2. DIVISIBILITÉ

Soient deux nombres, tels que la division du premier par le second donne pour reste ZÉRO, par exemple **45 et 9.**

Les nombres **45 et 9** peuvent donc être considérés respectivement :



1) Comme le dividende et le diviseur d'une division sans reste que l'on exprime en disant :

- 45 est divisible par 9
- 9est diviseur de 45
- 9 divise 45

2) Comme le produit de deux nombres et l'un des facteurs (9) du produit que l'on exprime en disant :

- 45 est un multiple de 9
- 9 est un facteur
- 9 est un sous-multiple de 45.

Définition :

Un nombre est divisible par un autre, si la division du premier par le second se fait sans reste.

2.1. Critères de divisibilité des nombres

Définition

On appeler critères de divisibilité, une règle permettant de reconnaître, sans effectuer la division, si un nombre est divisible par, un autre nombre donné.

Par 2 : Lorsqu’il est terminé par un zéro ou par un chiffre pair.

Soit : 50; 42; 38….

Par 3 : Lorsque la somme des chiffres est divisible par 3.

Soit : 921 ; 9 + 2 + 1 =12 :3 = 4

Par 4 : Lorsque les 2 derniers chiffres de droite forment un nombre divisible par 4

Soit : 1324 ; 24 :4=6

ou Lorsqu’il est divisible 2 fois par 2

Soit : 68 : 2 = 34 :2 =17

ou Lorsqu’il est terminé par 2 zéros

Soit 1500

Par 5 : Lorsqu’il est terminé par un zéro ou par un 5

Soit 725, 940

Par6; Lorsqu’il est, divisible par 2, puis par 3

Soit : 96 :2 = 48 :3 = 18

Par 9 : Lorsque la somme des chiffres est divisible par 9.

Soit : 6327

6 + 3 + 2 + 7 =18 :9 =2

2.2. NOMBRES PREMIERS

Définition

Un NOMBRE PREMIER est un nombre qui n’est divisible que par lui-même ou par 1 (l’unité)

1	**2**	**3**	**5**	**7**	**11**	**13**	**17**
19	**23**	**29**	**31**	**37**	**41**	**43**	**47**
53	**59**	**61**	**67**	**71**	**73**	**79**	**83**
89	**97**	**101**	**103**	**107**	**109**	**113**	**127**
131	**137**	**143**	**149**	**151**	**157**	**163**	**167**
173	**179**	**181**	**191**	**193**	**197**	**199**	**211**

2.3. Le **Plus Petit Commun Multiple** de plusieurs nombres est le pus petit nombre qui soit exactement divisible par ces nombres.

Comment trouver le P.P.C.M. :

Il est égal au produit de tous les facteurs premiers, communs ou non, affectés de leur plus grand exposant.

Pour trouver le P.P.C.M. de plusieurs nombres :

1) on les décompose en facteurs premiers.

2) on écrit tous les facteurs, communs ou non,

3) on les affecte du plus grand des exposants qu'ils possèdent dans les décompositions en facteurs premiers.

4) on calcule le produit de ces facteurs.

Exemple :

- Quel est le P.P.C.M. des nombres :

1260

1800

132

1 260	2
630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

1 800	2
900	2
450	2
225	3
75	3
25	5
5	5
1	

132	2
66	2
33	3
11	11
1	

• Tous les facteurs communs ou non sont

2 * 3 * 5 * 7 * 11

• On les affecte des plus grands exposants, on obtient : $2^3 * 3^2 * 5^2 * 7 * 11$

• Le P.P.C.M. est donc : 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 5 x 5 x7 x 11 = **138600**

2.4. Le **Plus Grand Commun Diviseur** de 2 ou plusieurs nombres est le plus grand nombre qui les divise tous exactement.

Comment trouver le **P.G.C.D.**

Il est égal au produit des facteurs premiers communs à tous ces nombres, chacun étant affecté de son plus faible exposant.

Pour trouver le P.G.C.D. de plusieurs nombres

1) on les décompose en facteurs premiers,

2) on écrit tous ces facteurs communs,

3) on les affecte du plus petit des exposants qu'ils possèdent dans les décompositions en facteurs premiers.

4) on calcule le produit de ces facteurs.

Exemple :

Quel est le P.G.C.D. des nombres :

1260

1800

132

1 260	2
630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

1 800	2
900	2
450	2
225	3
75	3
25	5
5	5
1	

132	2
66	2
33	3
11	11
1	

$1260 = 2x2x3x3x5x7 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

$1800 = 2x2x2x3x3x5x5 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2$

$132 = 2x2x3x11 = 2^2 \times 3 \times 11$

Les facteurs communs aux 3 nombres sont : **2 et 3.**

On les affecte du plus petit exposant : **2^2 et 3^1**

Un calcule le P.G.C.D. = 2x2x3 = **12**

Exercices :

a) Avant chacun des nombres suivants, écrivez s'il est divisible par 2; 3; 4; 5; 9 ou 25 :

525 :

505 :

312 :

302 :

127 :

100 :

14 :

9 :

b) Parmi les nombres suivants, entourez ceux qui sont des nombres premiers.

9 744 ; 211 ; 27 ; 69 ; 1211

181

14

125

24

151

35

215

89

1 125

45

c) Déterminez le P.P.C.M. de ces 3 nombres :

144 ; 216 ; 84

d) Déterminez le P.G.C.D. de ces 2 nombres :

1 030

1800

3. Les fractions

Définition

Une fraction est un symbole mathématique qui exprime une ou plusieurs parties d'une unité divisée en parties égales.

Exemple : $\frac{4}{5}$

Termes d'une fraction : (4/5)

4 - numérateur

5 - dénominateur

3.1. Simplification de fraction :

Pour réduire (simplifier) une fraction, il faut diviser ces 2 termes par un même nombre.(ici par 4)

$$\frac{24}{20} = \frac{24:4}{20:4} = \frac{6}{5}$$

Particularité des fractions :

Souvent une fraction exprime une valeur inférieur (<) à 1.

Exemples :

$\frac{3}{4}$ baguette de pain

$\frac{1}{2}$ de litre d'eau

Mais aussi, elle peut exprimer une valeur supérieure (>) à 1.

Exemples : “Un magnum d'eau de 1 litre et demi” = $\frac{3}{2}$ litres

“Une baguette et demi” = $\frac{3}{2}$ baguettes

On peut aussi écrire $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$

3.2. Les fractions décimales

Ce sont des fractions dans lesquels le dénominateur est 10; 100 ; 1 000 ; 10000 etc.

Comment transformer un nombre décimal en fraction décimale ?

$0{,}251 = \frac{0{,}251 \cdot 1000}{1000} = \frac{251}{1000}$

Exercices :

1) Ranger les fractions par ordre de grandeur croissante :

a) $\frac{7}{8}$ $\frac{9}{8}$ $\frac{2}{8}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{15}{8}$

b) $\frac{2}{23}$ $\frac{16}{23}$ $\frac{13}{23}$ $\frac{1}{23}$ $\frac{6}{23}$ $\frac{8}{23}$ $\frac{18}{23}$

c) $\frac{8}{12}$ $\frac{8}{5}$ $\frac{8}{9}$ $\frac{8}{3}$ $\frac{8}{15}$

2) Simplifier le plus possible les fractions :

$\frac{14}{36} =$; $\frac{112}{126} =$

$\frac{12}{18} =$; $\frac{64}{312} =$

$\frac{54}{90} =$; $\frac{42}{168} =$

3) Mettre sous forme de fractions décimales les nombres suivants :

0,125 = ; 0,2 = ; 0,027 =

1,375 = ; 0,6747 =

4) Mettre sous forme de nombres décimaux les fractions suivantes :

$\frac{4}{1000} =$

$\frac{6274}{1000} =$

$$\frac{127}{10} =$$

$$\frac{47}{100} =$$

3.3. Addition de deux fractions

Premier cas - **Fractions ayant le même dénominateur.**

Exemple :

$$\underbrace{\overbrace{\frac{3}{7} + \frac{2}{7}}^{\text{Somme des numérateurs}}}_{\text{Conservation du dénominateur}} = \frac{3+2}{7} = \frac{5}{7}$$

Règle :

Pour additionner deux fractions ayant le même dénominateur, il suffit d'additionner les numérateurs entre eux et de conserver le dénominateur.

Deuxième cas - **Fractions ayant un dénominateur différant.**

Exemple :

$$\frac{2}{5} + \frac{2}{7} =$$

Il faut réduire les fractions au même dénominateur.

Procédure :

Réduire au même dénominateur c'est rechercher le P.P.C.M. de 5 et de 7.

Donc P.P.C.M. = 5 x 7 = 35

$$\frac{2\cdot 7}{5\cdot 7} + \frac{2\cdot 5}{7\cdot 5} = \frac{14+10}{35} = \frac{24}{35}$$

3.4. Soustraction de fractions

a) **Premier cas - Fractions ayant le même dénominateur.**

Exemple :

$$\overbrace{\frac{7}{9} - \frac{3}{9}}^{\text{Différence des numérateurs}} = \frac{7-3}{9} = \frac{4}{9}$$

Règle

Pour soustraire deux fractions ayant le même dénominateur, il suffit de faire la différence des numérateurs et de conserver le dénominateur.

b) **Deuxième cas - Fractions ayant un dénominateur différant.**

Exemple :

$$\frac{7}{12}-\frac{3}{8}=$$

Il faut réduire les fractions au même dénominateur :

Procédure :

Réduire au même dénominateur c'est rechercher le P.P.C.M. de 12 et de 8.

$12 = 2^2$ x 3

$8 = 2^3$

P.P.C.M.= 2^3 x 3 = 24

$$\frac{7\times 2}{12\times 2}-\frac{3\times 3}{8\times 3}=\frac{14-9}{24}=\frac{5}{24}$$

3.5. Multiplication

Premier cas - Une fraction multipliée par un nombre.

Exemple :

$$\frac{4}{7} \text{ x } 3 = \frac{4 \text{ x } 3}{7} = \frac{12}{7}$$

Règle :

Pour multiplier une fraction par un nombre entier, il suffit de multiplier le numérateur par ce nombre et conserver le dénominateur.

Deuxième cas -Une fraction multipliée par une autre fraction.

$$\frac{1}{3} \text{ x } \frac{2}{5} = \frac{1 \text{ x } 2}{3 \text{ x } 5} = \frac{2}{15}$$

Règle

Pour multiplier deux fractions entre elles, il faut multiplier les numérateurs et les dénominateurs entre eux.

Cas particuliers :

$$\frac{2}{7} \mathbf{x} \frac{3}{8} = \frac{2:2}{7} \mathbf{x} \frac{3}{8:2} = \frac{1}{7} \mathbf{x} \frac{3}{4} = \frac{1\mathbf{x}3}{7\mathbf{x}4} = \frac{3}{28}$$

Avant d'effectuer les multiplications vérifier s'il n y a pas une possibilité de SIMPLIFICATION.

3.6. Division

Premier cas : Une fraction divisée par un nombre entière.

Exemple :

$$\frac{4}{5} : 3 = \frac{4}{5 \times 3} = \frac{4}{15}$$

x

multiplication

Règle :

Pour diviser une fraction par un nombre entier, il suffit de multiplier le dénominateur par ce nombre.

Deuxième cas : Une fraction multipliée par une autre fraction.

Exemple :

$$\frac{3}{7} : \frac{1}{4} = \frac{3}{7} \times \frac{4}{1} = \frac{12}{7}$$

Règle :

Pour diviser une fraction par une autre, il suffit de multiplier la première par l'inverse de seconde.

Troisième cas : Un nombre divisé par une autre fraction.

Exemple :

$$7 : \frac{3}{5} = \frac{7}{1} \times \frac{5}{3} = \frac{35}{3}$$

Règle :

Pour diviser un nombre par une fraction on multiplie ce nombre par l'inverse de la fraction.

Exercices :

a) Effectuer les différentes opérations dans les fractions suivantes :

$\frac{5}{3} : \frac{1}{4} =$ $\qquad$ $\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{4} =$

$\frac{12}{4} : \frac{12}{6} =$ $\qquad$ $\frac{2}{17} \cdot \frac{3}{34} =$

$\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{6} : \frac{1}{3} =$

$\frac{4}{5} \times \frac{7}{8} =$ $\qquad$ $\frac{16}{25} \times \frac{1}{2} =$

$\frac{14}{3} : \frac{2}{3} =$ $\qquad$ $\frac{1}{12} : \frac{1}{6} =$

$\left(\frac{1}{8} : \frac{3}{4}\right) \times \frac{2}{3} =$

b) Sur un tour conventionnel, un tour de manivelle sur le chariot transversal le fera avancer de 2 mm. Sachant que le tambour gradué est partagé en 200 divisions de valeurs égales :

1. Écrire sous forme de fraction la valeur d'une graduation.
   La réduire à la plus simple expression.
   L'écrire sous forme décimale.
2. Je prends une passe équivalente à 3/4 de tour de manivelle.
   Quelle sera la valeur de la passe d'ébauche ?

3. Je reprends une passe de finition équivalent à de tour de manivelle.
   Quelle sera la valeur de la passe de finition
   Quelle est a valeur totale des passes (ébauche + finition)

Résultat sous forme de fraction, puis décimale.

4. Règles de trois

<u>1) Règle de trois simple et directe</u>

(S'applique à des grandeurs directement proportionnelles),

En 8 heures de travail un tourneur a réalisé 10 pièces.

Combien des pièces réalisera-t-il après 40 heures de travail ?

Essayons de résoudre ce problème par 2 méthodes différentes.

a) Méthode des proportions.

Le nombre des pièces est directement proportionnel au temps de travail.

Nous pouvons écrire la proportion suivante :

$$\frac{10}{8} = \frac{\mathbf{a}}{40}$$

'a' étant le nombre réalisé après 40 heures de travail, le produit des extrêmes étant égal au produit des moyens, nous obtenons :

$8 \text{ x } a = 400$; $a = \dfrac{400}{8} = 50$

b) Méthode du coefficient constant de proportionnalité

Nous pouvons remarquer que le coefficient de proportionnalité est de

$$\frac{10}{8} = 1.25$$

Ce coefficient est égal au nombre des pièces réalisées dans 1 heure.

Pour 40 heures de travail, l'ouvrier réalisera :

1,25 x 40 = 50 pièces

<u>2) Règle de trois simple et inverse</u>

(S 'applique à des grandeurs inversement proportionnelles)

En employant 10 ouvriers, un entrepreneur peut faire construire un ouvrage en 9 jours.

Combien mettrait-il de jours s'il occupait 15 ouvriers ?

Essayons de résoudre ce problème par les 2 méthodes précédentes.

a) Méthode des proportions

Nous constatons que les nombres de jours sont inversement proportionnels aux nombres d'ouvriers.

On peut écrire :

$$\frac{9}{\mathbf{a}} = \frac{15}{10}$$

$$a = \frac{90}{15}$$

b) Méthode du coefficient constant de proportionnalité

Le produit du nombre d'ouvriers par le nombre de jours correspondants est constant.

Il est égal à 10x9 = 90

C'est le nombre de jours nécessaires à un ouvrier pour effectuer seul le travail.

On en déduit le temps mis par 15 ouvriers.

90 :15=6

3) Règle de trois composée

(Elle permet de calculer une valeur d'une grandeur proportionnelle è plusieurs autres).

Exemple :

10 ouvriers travaillant 8 heures par jour construisent en 18 jours un mur de 36m de long. Combien de jours mettraient 15 ouvriers travaillant 9 heures par jour pour construire un mur semblable de 54 m de long ?

a) Méthode des proportions

Le temps est directement proportionnel à la longueur du mur, inversement proportionnel au nombre d'ouvriers et inversement proportionnel à la durée journalière du travail.

Donc :

$$\frac{a}{18} = \frac{54}{36} \times \frac{10}{15} \times \frac{8}{9}$$

On a : $\frac{a}{18} = \frac{54 \times 10 \times 8}{36 \times 15 \times 9}$

On tire $a = \frac{54 \times 10 \times 8 \times 18}{36 \times 15 \times 9} = 16$ jours

b) Méthode de réduction de l'unité

Cette méthode conduit au raisonnement suivant :

- 10 ouvriers travaillant 8 heures par jour pour construire 36 m mettent : 18 jours.
- 10 ouvriers travaillant 8 heures par jour pour construire 1 m mettent : $\frac{18}{36}$
- 10 ouvriers travaillant 8 heures par jour pour construire 54 m mettent : $\frac{18 \times 54}{36}$
- 10 ouvriers travaillant 1 heure par jour pour construire 54 m mettent : $\frac{18 \times 54 \times 8}{36}$
- 10 ouvriers travaillant 9 heures par jour pour construire 54 m mettent : $\frac{18 \times 54 \times 8}{36 \times 9}$
- 1 ouvrier travaillant 9 heures par jour pour construire 54 m met : $\frac{18 \times 54 \times 8 \times 10}{36 \times 9}$
- 15 ouvriers travaillant 9 heures par jour pour construire 54 m mettent :

$$\frac{18 \times 54 \times 8 \times 10}{36 \times 9 \times 15} = 16 \text{ jours}$$

Exercice :

La réfection d'une route doit être terminée en 26 jours et pour y parvenir, on devait employer

36 ouvriers travaillant 10 heures par jour. Mais au bout de 12 jours de travail on réduit la journée de travail à 8 heures en convenant que le salaire d'une journée de 8heures sera les

9/10 d'une journée de 10 heures.

On demande :

1) Combien d'ouvriers faudra-t-il ajouter pour terminer l'ouvrage dans les délais prescrits ?

2) Quel était le salaire d'une journée de 10heures sachant que le total des salaires payés a été de 23976 Euro ?

III. ALGÈBRE

1. CALCULS DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES DÉCIMAUX

a) Puissances entières de 10

10^1	10^2	10^3	10^4	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
10	100	1000	10000	0,1	0,01	0,001	0,0001

$10^n = 10 \times 10 \times 10 \ldots \times 10 = 1000 \ldots 00$
(n facteurs) (n zéros)

$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = 0{,}000\ldots01$ (n zéros)

Si n et p sont des entiers relatifs

$10^n \times 10^p = 10^{n+p}$ $(10^n)^p = 10^{np}$ $\frac{10^n}{10^p} = 10^{n-p}$

EXEMPLES

$10^2 \times 10^3 = 10^5$ $10^{-3} \times 10^4 \times 10^2 = 10^{-3+4+2} = 10^3$

$(10^2)^3 = 10^{2 \times 3} = 10^6$ $(10^{-3})^2 = 10^{(-3) \times 2} = 10^{-6}$

$\frac{10^5}{10^2} = 10^{5-2} = 10^3$

EXERCICE 2.

Calculer les nombres : $10^{-2} \times 10^3 \times 10^4 =$

$\frac{10^{-3}}{10^{-2}} =$

Calculer les nombres :

2 327 000 000 x 0,000 032 95 =

0,003 583 : 259 000 000=

b) UNITÉS DE DURÉE

a) Définition

Les durées courantes sont généralement exprimées en heures, minutes, secondes.
1 heure = 60 minutes
1 minute = 60 secondes

EXEMPLE

Calculer : 2 h 13 min 14s + 3 h 50 min 51 s = 5 h 63 min 65 s = 6 h 4 min 5 s.

b) Vitesse, durée, distance

La relation qui lie la vitesse v d'un mobile, la distance parcourue **d** pendant le temps t est

$$\boxed{d = v \times t}$$

EXEMPLES

Un avion doit parcourir 3200 km. Il vole à 850 km/h. Combien de temps mettra-t-il?

$t = \frac{3200}{850}$ = 3 h 45min 52s

EXERCICE 3.

1) Un signal radio met 2,5 s de la terre à la terre après avoir été réfléchi par la lune
(Distance terre- lune 380 000 km). A quelle vitesse se déplace-t- il?

2) Lors d'un orage on entend le tonnerre 25 secondes après avoir vu l'éclair. Sachant que le nuage se trouve à la distance de 8,5 km, déterminer en mètres par seconde, la vitesse de propagation du son dans l'air.

2. ACTIVITÉS NUMÉRIQUES DANS Q

1. OPÉRATION DANS L'ENSEMBLE Q DES RATIONNELS

Un nombre rationnel est représenté par une fraction $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers relatifs ($b \neq 0$).

Rationnels égaux : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à ad = bc.

Addition et soustraction : $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ et $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$

Multiplication et quotient : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ et $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

Rappelons que si $a \neq 0$ $\frac{a}{a} = 1$.

Pour le calcul d'additions ou de soustractions, on réduit chacune des fractions au même dénominateur.

Exercices.1

Calculer : $a = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$ $b = \frac{5}{4} + \frac{5}{3}$ $c = \frac{3}{4} - \frac{7}{2}$ $d = \frac{6}{5} \times \frac{1}{2}$ $e = \frac{1}{2} : \frac{3}{4}$

2) OPÉRATEURS RATIONNELS. CALCUL DE POURCENTAGES

a) Quelques définitions

- Prendre les $\frac{3}{4}$ de A c'est multiplier A par $\frac{3}{4}$
- Prendre les 7 % de A c'est multiplier A par $\frac{7}{100}$ ou 0,07.

- Soit deux grandeurs G_1 et G_2 de même nature; si la mesure de G_1 est a et la mesure de G_2 est b, la fraction de G_1 par rapport à G_2 est le nombre $\frac{a}{b}$
- Si $\frac{a}{b} = \frac{p}{100}$, le nombre p est le pourcentage de la grandeur G_1 par rapport à G_2

b) Exemples

1. En fin d'année un fournisseur fait à ses bons clients une ristourne de 3,5 % sur le montant de leurs achats. Calculer la ristourne sur un montant de 8 700 F.
La ristourne exprimée en francs est :

$8700 \text{ x } \frac{3{,}5}{100} = 304{,}5$ soit 304,5 F.

c) <u>Augmentation. Diminution</u>

Dans une ville, en 1998, 1200 élèves se sont présentés à l'examen du technicien. En 2002, il y a environ 6 % de candidats en plus. Quel est le nombre d'élèves présentés en 2002.
L'augmentation du nombre de candidats est : 1200 X 0,06 = 72.
Le nombre de candidats présentés en 2002 est : 1200 + 72 =1 272.
On a réalisé le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}
\boxed{1200} \arrow[r, "\text{x } 0{,}06"] \arrow[dr, "\text{x}1{,}06"'] & \boxed{72} \arrow[d, "+1200"] \\
 & \boxed{1272}
\end{tikzcd}$$

Cela revient à multiplier 1200 par 1,06. En effet :

N = 1200 + 1200 x 0,06 = 1200 x (1 + 0,06) = 1272

d) <u>Possibilités d'un achat</u>

On achète un poste de télévision 3129 F. On verse le 3 du montant à la commande. Le reste, après avoir subi une majoration de 10 %, sera payé en 9 mensualités égales.

1. Calculer le montant d'une mensualité.
2. A combien revient le poste de télévision ? Si on avait pu payer comptant, le marchand aurait consenti une remise de 5 % du prix marqué
3. Quelle économie aurait-on réalisé dans ce cas ?

<u>Réponse</u>

On verse à la commande : $3\,129 \text{ x } \frac{1}{3} = \frac{3129}{3} = 1043$ F.

Il reste à payer : 3 129 -1043 = 2 086 F.

Cette somme subit une majoration de 10 %, soit : $2\,086 \text{ x } \frac{10}{100} = 2\,086 \text{ x } 0{,}1 = 208{,}6$ F.

Le montant d'une mensualité est

$\frac{2086+208,6}{9}=\frac{2294,6}{9}$ = 254,95 F.

Le poste de télévision revient à

3 129 + 208,6 = 3 337,6 F.

En le payant comptant, on obtient une remise de : 3 129 x $\frac{5}{100}$ = 156,45 F.

L'économie réalisée par rapport à l'achat à crédit est dans ce cas 156,45 + 208,6 = 365,05 F.

3. PUISSANCE. RACINE CARRÉE.ÉGALITÉS FONDAMENTALES

1. PUISSANCE D'UN NOMBRE

a) Définition et propriétés

a et b sont des nombres rationnels; n est un entier naturel distinct de 0.

$$a^n = a \times a \times a ... \times a \times a \qquad \text{(n facteurs)}$$

L'écriture a^n se lit « a puissance n »; n est l'exposant de a dans a^n.

$$a^n \times a^p = a^{n+p} \qquad (ab)^n = a^n \times b^n \qquad (a^n)^p = a^{np} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \begin{cases} a^{n-p} & \text{si } n > p \\ \frac{1}{a^{p-n}} & \text{si } n < p \\ 1 & \text{si } n=p \end{cases} \qquad \text{(n et p entiers naturels)} \qquad (a \neq 0)$$

Si n est un entier naturel, on pose $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

On démontre que les résultats précédents s'étendent au cas des exposants négatifs.

Exercices

A l'aide d'une calculatrice, calculer a = $(5,1)^7$

Réponse : On forme la séquence

5,1 $\boxed{y^x}$ 7 $\boxed{=}$ On lit a = 89 741,067...

2) Calculer : $(2,7)^3 \times (2,7)^2$; $(0,45)^4 \times (0,45)^2$; $[(1,3)^2]^3$; $(3^2)^{-4}$.

3) Calculer le nombre $\frac{2^5 \times 3^5 (-6)^3}{2^3 \times 3 \times (-6)}$

2. RACINE CARRÉE D'UN NOMBRE POSITIF

a) Définition et propriétés

a est un rationnel positif.

$\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré est a.

$x = \sqrt{a}$ équivaut à $x^2 = a$ $\qquad (\sqrt{a})^2 = a$

$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ $\qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$\sqrt{a}$ se lit « racine carrée de a ».

Exemples

1) A l'aide d'une calculatrice, calculer $\sqrt{2{,}35}$

On forme : 2,35 $\boxed{\sqrt{x}}$ $\boxed{=}$

On lit : $\sqrt{2{,}35}$ =1,532 97...

2) Calculer $a = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{3}$

On forme la séquence

3 $\boxed{\sqrt{x}}$ $\boxed{+}$ 7 $\boxed{\sqrt{x}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 3 $\boxed{=}$ On obtient : a =1,459...

3. Exercices

1) Calculer le rayon d'un disque dont l'aire est 40 cm^2.
2) Calculer à 0,1 près par défaut les nombres suivants :

$\sqrt{3 \times 5^2}$; $\sqrt{37 \times 4}$; $\sqrt{0{,}13 \times 16}$; $\sqrt{528} \times \sqrt{0{,}09}$ $\sqrt{\frac{38}{144}}$; $\sqrt{\frac{500}{10^4}}$

4. ÉGALITES FONDAMENTALES

a) Définition

a et b sont des nombres entiers, décimaux, rationnels ou réels.

- $(a + b)^2 = a^2 + 2\ ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b2$
- $(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$

Ces relations sont utiles pour effectuer des calculs mentalement
Exemples

$31^2 = (30+1)^2 = 30^2 + 2 \times 30 \times 1 +12 = 900 + 60 +1 = 961$

b) Inégalités

- m réel positif. Si $a \leq b$ alors $ma \leq mb$
- m réel négatif. Si $a \leq b$ alors $ma \geq mb$

On peut le vérifier sur les exemples suivants
$-4 < 2$; $3 \times (-4) < 3 \times 2$; soit $-12 < 6$.

$-4 < 2$; $(-3) \times (-4) > (-3) \times 2$; soit $12 > -6$.

Exercice

Calculer $(2a + 3)^2$, $(a - 2)^2$ sachant que a est un réel.
Factoriser $x^2 + 3x$; $x^2 - 9$; $x^3 - 4x$; $25x^2 - 16$.

Un corps tombe en chute libre ; lâché sans vitesse au départ, il parcourt au bout du temps t exprimé en seconde,

La distance $\frac{9{,}81 \times t^2}{2}$, évaluée en mètres.

Déterminer la hauteur d'une chute de 1s, 2s, 3s

Combien dure une chute de 10m, 20m, 100m, 1000m.

5. GRANDEURS PROPORTIONNELLES

a) Définition

Deux grandeurs sont dites proportionnelles si les mesures correspondantes de chacune d'elles sont deux suites proportionnelles de nombres.

EXEMPLES

- Les masses et les volumes d'un même solide sont des grandeurs proportionnelles.
- La durée d'un trajet et le temps mis à le parcourir, à vitesse constante, sont des grandeurs proportionnelles.

b) Calculs pratiques

Sachant que la masse d'une tige de métal de 13 m est 1,2 kg, déterminer la masse M de 5 mètres de cette même tige.
La masse de la tige est proportionnelle à sa longueur. On a donc

Longueur (m)		Masse (kg)
13	$\longrightarrow$	1,2
1	$\longrightarrow$	$\frac{1{,}2}{13}$
5	$\longrightarrow$	$\frac{1{,}2}{13} \times 5$

$$M = \frac{1{,}2 \times 5}{13} = \frac{6}{13}$$

Soit : M = 0,462 Kg

Exercice.

Un alliage d'argent et de cuivre comprend 3,348 kg d'argent pour une masse totale de 3,600 kg. Quelle est la masse de cuivre contenue dans un lingot de 400 g formé avec cet alliage ?

4. ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

1) ÉQUATION DU TYPE **: $x + b = a$**

Dans R, toute équation de la forme *:* $x + b = a$ admet pour solution unique le nombre $a - b$.

EXEMPLES :

1. Résoudre dans R l'équation : $x + \frac{5}{3} = \frac{2}{3}$

L'équation s'écrit :

$$x = \frac{2}{3} - \frac{5}{3} \qquad \text{soit} \quad x = \frac{-3}{3} = -1$$

La solution est le nombre -1.

Exercice 1. Résoudre dans R les équations : $x - 2 = 5$; $x + \frac{3}{2} = 1$; $x - \frac{4}{5} = \frac{2}{3}$

2) ÉQUATION DU TYPE : **$ax = b$**

Dans R, toute équation de la forme : $ax = b$ $(a \neq 0)$

admet pour solution unique le nombre : $\frac{b}{a}$

Exemple

1. Résoudre dans R l'équation : $\frac{3}{4}$ x = $-\frac{2}{5}$

L'équation s'écrit : $x = \frac{\frac{-2}{5}}{\frac{3}{4}}$ soit $x = \left(\frac{-2}{5}\right) \times \left(\frac{4}{3}\right) = \frac{-8}{15}$

La solution est le nombre $\frac{-8}{15}$

Exercice.

Résoudre dans R les équations :

$\frac{2}{3}x = 5$; $\frac{1}{2}x = \frac{2}{3}$

APPLICATION A LA RESOLUTION DES PROBLEMES

1 PREMIER PROBLÈME

Calculer la petite base d'un trapèze rectangle dont les mesures en cm de l'autre base et de la hauteur sont respectivement 52 et 35. L'aire en cm² de la surface est 1365.

Choix de l'inconnue : désignons par *x* la mesure en cm de la petite base.

Mise en équation du problème
Sachant que l'aire S est :

$$S = \frac{h(B+b)}{2}$$

on obtient

$$1365 = \frac{35(52+x)}{2}$$

Résolution de l'équation

En multipliant les deux membres par 2, on a

$$2\,730 = 35 \text{ x } 52 + 35\,X$$

$$35\,X = 2\,730 - 1\,820$$

$$X = \frac{910}{35} = 26$$

La mesure en cm de la petite base du trapèze est 26.

2 DEUXIÈME PROBLÈME

Le prix d'un objet est diminué de 13,30 F quand le commerçant fait au client une remise de 7 %.
Quel est le prix de vente de l'objet ?
Combien le client l'a-t-il payé ?

Choix de l'inconnue : *x* représente le prix de vente de l'objet évalué en francs.

Mise en équation du problème
Donc
Résolution de l'équation :
La remise faite au client est $\frac{7}{100}x$ ou 13,3

Donc : $\frac{7}{100}x = 13,3$

$7\,x = 13,30 \text{ x } 100$ et $x = \frac{1330}{7} = 190$

Le prix de l'objet est 190 F.
Le client l'a payé : 190 -13,30 =176,70 F.

Exercices :

1) Dans une entreprise on emploie 240 ouvriers; il y a quatre fois plus d'hommes que de femmes. Combien y a-t-il d'hommes et de femmes dans cette entreprise ?

2) La T.V.A. (taxe à la valeur ajoutée) étant au taux de 18,6 %,
Combien payez-vous un objet dont le prix hors taxe est 135 F?
Quel est le prix hors taxe d'un objet que vous payez 150 F?

3) Calculer le côté d'un carré sachant que si on augmente de 5 m l'un des côtés et si l'on diminue de 3 m l'autre côté, on obtient les côtés d'un rectangle ayant la même aire que celle du carré.

4) Calculer la hauteur à donner à une pièce cylindrique pour que le volume soit 1 000 cm3, le rayon de base ayant pour valeur en cm
2; 4; 6; 8; 10; 12. On utilisera la formule $V = \pi R^2 h$.

5. SYSTEMES D'EQUATIONS AU 1ER DEGRÉ

1) Équation du 1er degré à 2 inconnues

a) Définition

Résoudre l'équation $2x - y = -1$ c'est déterminer l'ensemble S de tous les couples de réels (x, y) qui vérifient l'équation.

b) Résolution de l'équation $2x - y = -1$

Pour tout couple de réels (x, y) l'équation (1) est équivalente à $y = 2x + 1$
Pour obtenir les solutions il suffit de donner une valeur arbitraire à x et déterminer la valeur correspondante de y. Ainsi

x	1	- 1	2	3	4	0,5	0,25	m
y	3	-1	5	7	9	2	1,5	2m + 1

(1; 3); (-1; -1); (2; 5); (3; 7); (4; 9); (0,5; 2); (0,25; 1,5);…… (m; 2 m + 1) sont des solutions de de l'équation.
On écrit :

$S=\{(m; 2m+1); m \in (\mathbb{R}\}$.

2) Système de 2 équations du 1er degré

Résoudre le système des deux équations

$$\begin{cases} 2x - y = 4 & (E1) \\ 3x + 2y = -1 & (E2) \end{cases}$$

c'est trouver toutes les solutions communes aux deux équations qui le composent.

a) Méthode de résolution par substitution

A l'aide d'une équation, on exprime une inconnue en fonction de l'autre; puis on substitue l'expression obtenue dans l'autre équation.
Soit à résoudre le système

$$\begin{cases} 2x - y = 4 & (1) \\ 3x + 2y = -1 & (2) \end{cases}$$

De l'équation (1) on obtient : $y = 2x - 4.$ (3)
En remplaçant dans (2), on a

$3x+2(2x - 4) = -1$
$3x+ 4x - 8 = -1 \Rightarrow 7x = 7$ soit $x = 1.$
En remplaçant dans l'équation (3), x par 1, on trouve
$y = 2 - 4 = -2$. Donc, nécessairement : $x = 1$, $y = 2$.
Vérifions que le couple ($x = 1$, $y = -2$) est bien solution du système :
2 x 1 - (-2) = 2 + 2 = 4
3 x 1 + 2 x (- 2) = 3 - 4 = - 1.
On conclut que la solution du système est le couple (1; -2).
S={(1; -2)}
b)) Méthode de résolution par combinaison linéaire
Opérons différemment pour résoudre le système

$$\begin{cases} 2x - y = 4 & (1) \\ 3x + 2y = -1 & (2) \end{cases}$$

Les coefficients de y sont - 1 et 2. On peut obtenir des coefficients opposés en multipliant les deux membres de l'équation (1) par 2. On obtient :

$$\begin{cases} 4x - 2y = 8 & (3) \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$$

On élimine l'inconnue y en ajoutant (3) et (2), soit

$$4x+3x = 8 - 1$$

$$7x = 7$$

$$x = 1.$$

En remplaçant x par 1 dans l'équation (1), on obtient

$$2 - y = 4 \qquad \text{soit } y = -2.$$

Donc nécessairement : $x = 1, y = -2.$
On vérifie comme précédemment que le couple ($x = 1; y = -2$) est solution du système.
Donc :

S ={(1; -2)}

Exercice.
Résoudre le système

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 2y = 3. \end{cases}$$

6. RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

a) Cas général

Soit l'équation du second degré : $ax^2 + bx + c = 0$. ($a \neq 0$) (1)
On démontre et on admettra que :

- Si $b^2 - 4ac > 0$, les solutions de (1) sont :

  $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\quad x_2 = \dfrac{-\mathbf{b}+\sqrt{\mathbf{b}^2-4\mathbf{ac}}}{2\mathbf{a}}$,

- Si $b^2 - 4ac = 0$, la solution de (1) est $-\dfrac{b}{2a}$
- Si $b^2 - 4ac < 0$, l'équation n'a pas de solution.

Le nombre ($b^2 - 4ac$) est appelé discriminant de l'équation.

b) Application .

En utilisant les formules de résolution, résoudre les équations $x^2 - 6x + 8 = 0$
Cette équation est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec a = l, b = - 6, c = 8.
$b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 36 - 32 = 4$. Il y a donc des solutions données par

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{6-\sqrt{4}}{2} = \frac{6-2}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-\mathbf{b}+\sqrt{\mathbf{b}^2-4\mathbf{ac}}}{2\mathbf{a}} = \frac{6+\sqrt{4}}{2} = \frac{6+2}{2} = 4$$

donc : $S = \{2, 4\}$.

Exercices

1) Résoudre les équations :

- $x^2 + 2x + 5 = 0$.
- $x^2 - 3x + 2$

2). Un corps étant abandonné à lui-même tombe et parcourt en **t** secondes une distance **y** égale à 4,9 t^2 mètres.

- Représenter graphiquement la fonction : $t \rightarrow 4,9\ t^2$.
- Déterminer le temps mis pour parcourir 176.4 m.
- Trouver la profondeur d'un puits de mine sachant qu'une pierre lâchée à l'origine de ce puits tiret 7 secondes pour atteindre le fond.

3). Un cylindre a une hauteur de 40 cm et un rayon de base égal à *x* cm.

- Exprimer la relation qui lie le volume V et le rayon *x*.
- Étudier et représenter graphiquement la fonction *f* tel que V = *f (x)* lorsque *x* varie de 0 à 5 cm.

4). Dans un conducteur électrique de résistance 5 ohms on fait passer un courant d'intensité *i* ampères.
La quantité de chaleur dégagée par le courant est donnée en joules par :

$$Q = 5 \times i^2 \times 60.$$

- Calculer la quantité de chaleur dégagée en une minute par le conducteur si l'on fait passer un courant de 0,1 A; 0,2 A; 0,3 A; 0,4 A; 0,5 A.
- Tracer le graphique de la fonction f définie par Q = $f(i)$ quand i varie de 0 à 0,5.

5). Calcul mental

- On donne $f(x) = x^2 + x$, calculer $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(10)$, $f(-1)$
- On donne $f(x) = x^2 - x$, calculer $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(10)$, $f(-1)$.

IV. Géométrie

Droite / Demi-droite / Segment

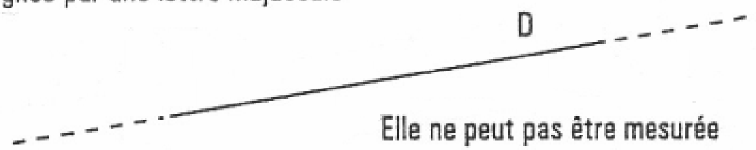
Une **ligne droite** est infinie

Une ligne droite est désignée par une lettre majuscule

Exemple : droite ***D***

ou 2 lettres minuscules

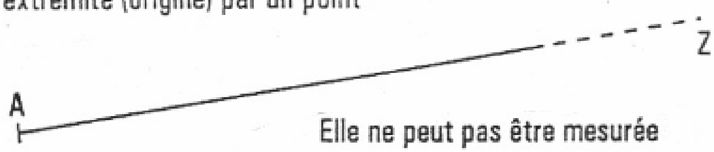
Exemple : droite ***xy***



Elle ne peut pas être mesurée

elle n'a pas de longueur

Une **demi-droite** est limitée à une extrémité (origine) par un point



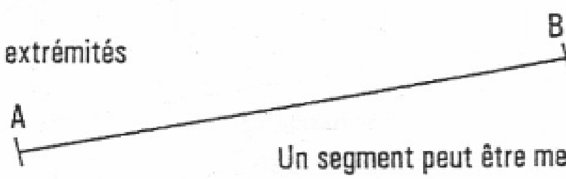
Elle ne peut pas être mesurée

elle n'a pas de longueur

Elle est désignée par son origine et une lettre minuscule

Exemple : demi-droite ***Az***

Un **segment de droite** est limité aux deux extrémités



Un segment peut être mesuré

un segment a une longueur

Un segment est désigné par les points qui le limitent

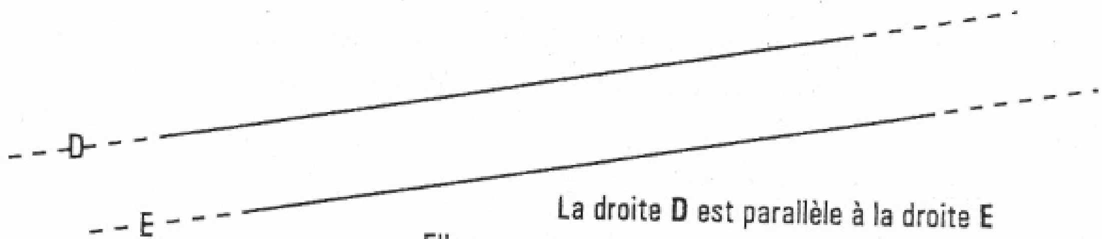
Exemple : segment ***AB***

Attention

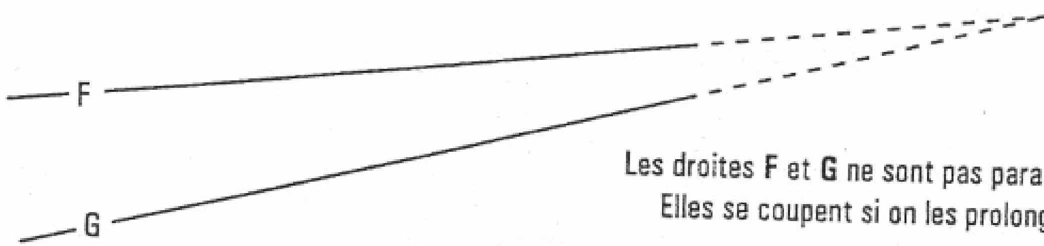
On dit très souvent droite ***AB*** *à la place de segment* ***AB****.*

Droites parallèles

Des droites sont parallèles lorsqu'elles ne se coupent jamais.

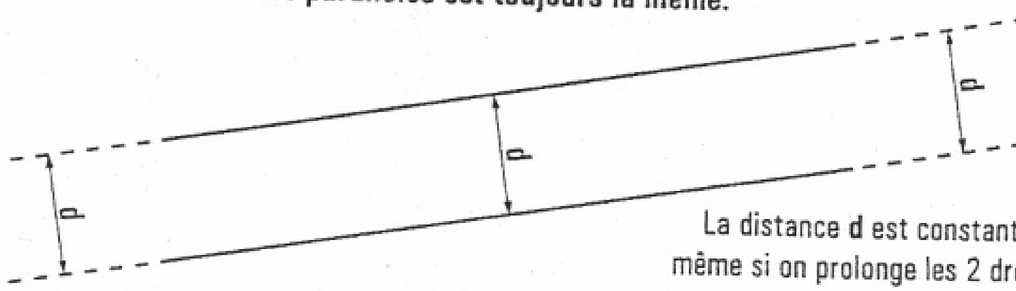


La droite **D** est parallèle à la droite **E**
Elles ne peuvent pas se rencontrer même si on les prolonge



Les droites **F** et **G** ne sont pas parallèles
Elles se coupent si on les prolonge

La distance entre 2 droites parallèles est toujours la même.



La distance **d** est constante,
même si on prolonge les 2 droites

Si une première droite est parallèle à une deuxième droite,
et si cette deuxième droite est parallèle à une troisième droite,
alors la première droite est parallèle à la troisième droite.

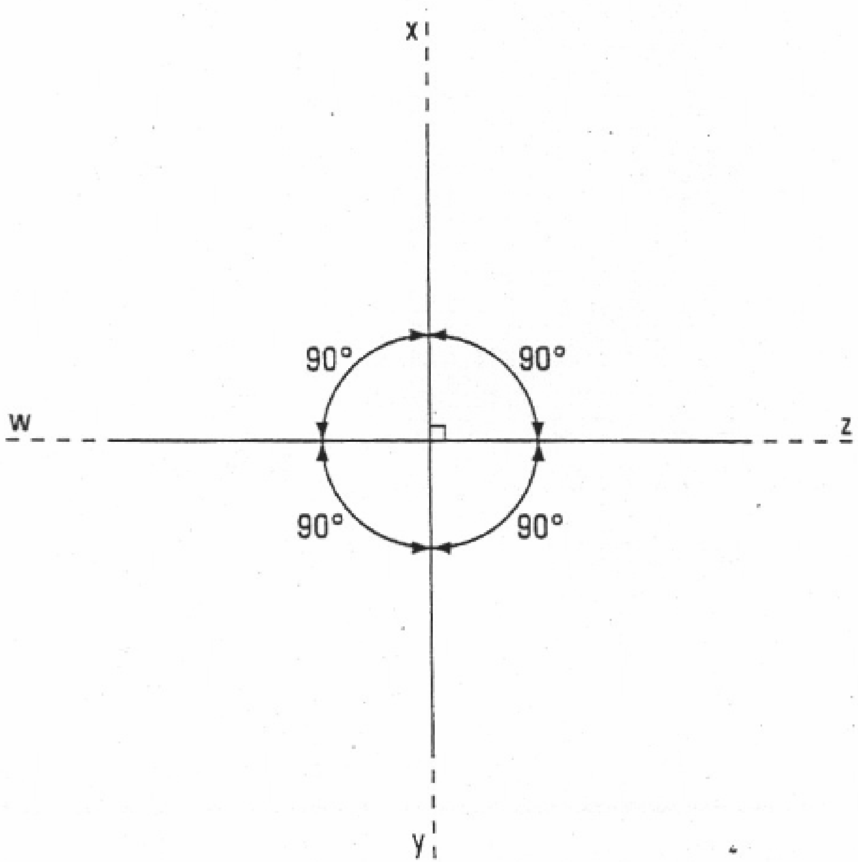
La droite **E** est parallèle à la droite **F**

La droite **F** est parallèle à la droite **G**

DONC La droite **E** est parallèle à la droite **G**

Droites perpendiculaires

Une droite est perpendiculaire à une autre droite lorsqu'elle forme entre elles 4 angles égaux.

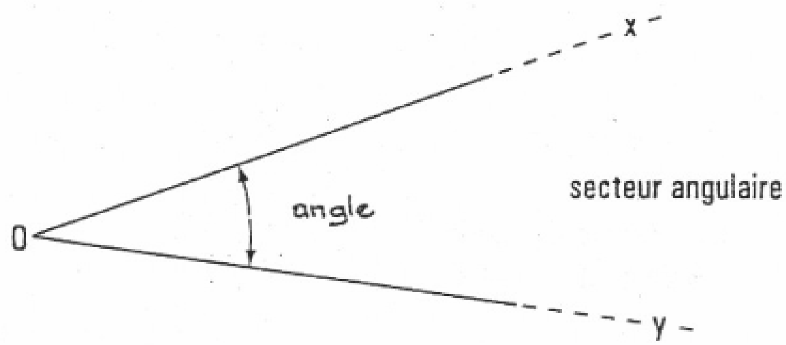


La droite xy est perpendiculaire à la droite **wz**.

L'angle

Un **secteur angulaire** est la partie délimitée par deux demi-droites ayant la même origine.

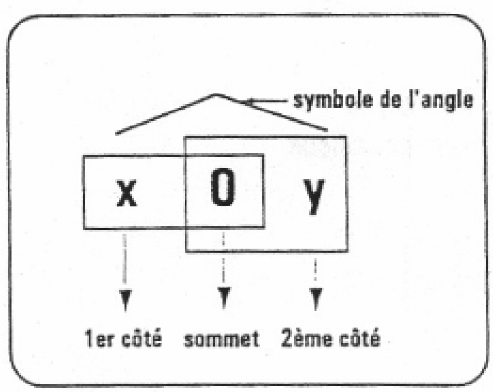
L'**angle** correspond à l'**écartement** des deux demi-droites qui délimitent le secteur angulaire.



On appelle **O** le **sommet** de l'angle

On appelle **Ox** et **Oy** les **côtés** de l'angle

On le note : angle $\widehat{xOy}$



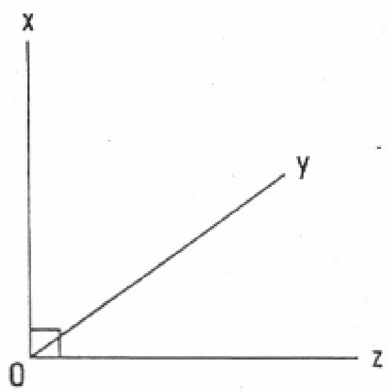
Notez bien :

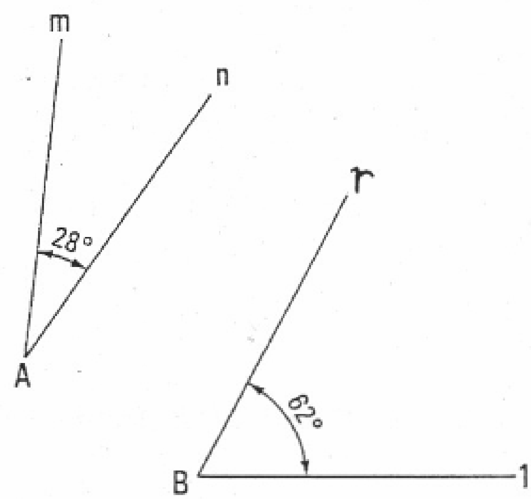
L'angle est une grandeur que l'on peut mesurer.

Mesurer un angle c'est mesurer son écartement, qu'on appelle son amplitude.

Angles complémentaires / Angles supplémentaires

Deux angles sont complémentaires si leur somme égale l'angle droit (90°).

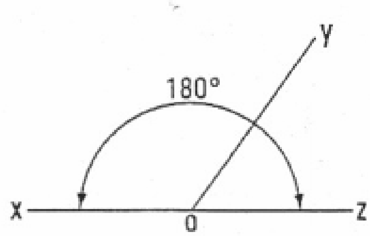


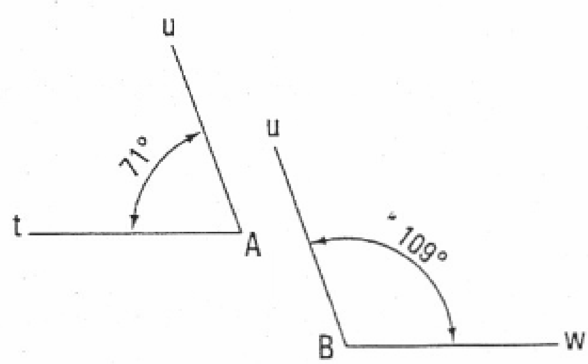


$\widehat{xOz}$ est un angle droit donc $\widehat{xOy}$ et $\widehat{yOz}$ sont complémentaires.

$\widehat{mAn} + \widehat{rB1} = 28° + 62° = 90°$
donc $\widehat{mAn}$ et $\widehat{rB1}$ sont complémentaires.

Deux angles sont supplémentaires si leur somme égale l'angle plat (180°).



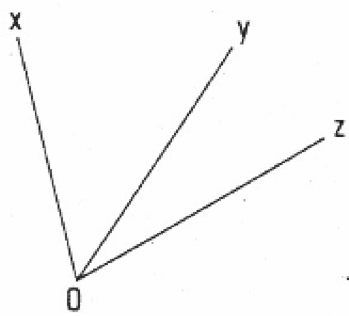


$\widehat{xOz}$ est un angle plat donc $\widehat{xOy}$ et $\widehat{yOz}$ sont supplémentaires.

$\widehat{tAu} + \widehat{uBw} = 71° + 109° = 180°$
donc $\widehat{tAu}$ et $\widehat{uBw}$ sont supplémentaires.

Angles adjacents / Angles opposés par le sommet

Deux angles sont adjacents s'ils ont le sommet commun et un côté commun.

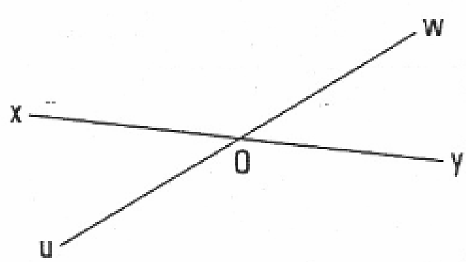


Le sommet O est commun à l'angle $\widehat{xOy}$ et à l'angle $\widehat{yOz}$

Le côté **O y** est commun à l'angle $\widehat{xOy}$ et à l'angle $\widehat{yOz}$

Les angles $\widehat{xOy}$ et $\widehat{yOz}$ sont adjacents.

Deux angles sont opposés par le sommet si leur sommet est commun et leurs côtés sont dans le prolongement les uns des autres.



Le sommet O est commun à l'angle $\widehat{xOu}$ et à l'angle $\widehat{yOw}$

Le côté **O x** se prolonge par **O y**

Le côté **O u** se prolonge par **O w**

Les angles $\widehat{xOu}$ et $\widehat{yOw}$ sont opposés par le sommet.

*NB : Les angles **x O w** et **u O y** sont aussi opposés par le sommet.*

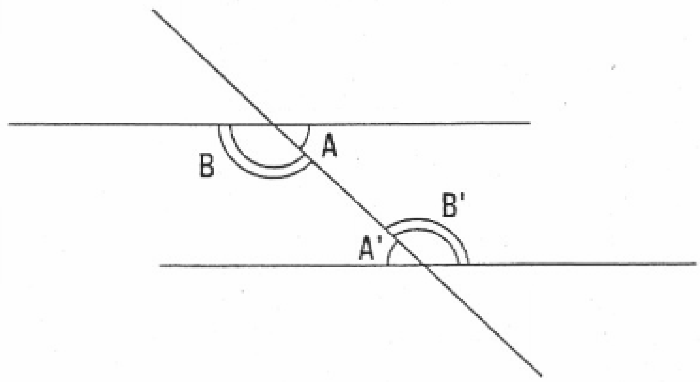
Deux angles opposés par le sommet ont la même amplitude, ils sont égaux.

Les angles $\widehat{xOw}$ et $\widehat{uOy}$ sont égaux.

Les angles $\widehat{xOu}$ et $\widehat{yOw}$ sont égaux.

Cas d'une droite sécante à deux droites parallèles. Apparaît alors la notion d'angles alternes internes, d'angles alternes externes et d'angles correspondants.

- **Angles alternes internes**

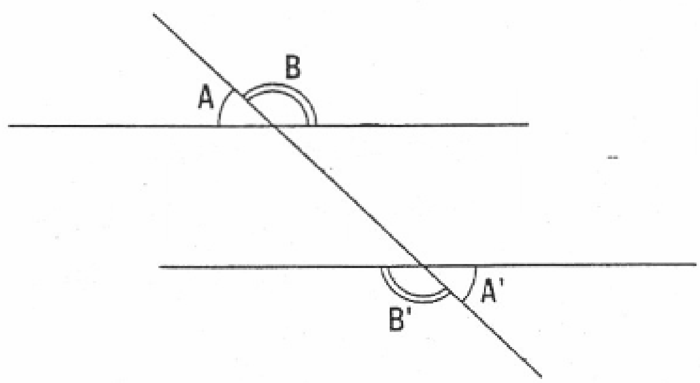


$\hat{A} = \hat{A}'$

$\hat{B} = \hat{B}'$

$\hat{A} + \hat{B} = 180°$

- **Angles alternes externes**

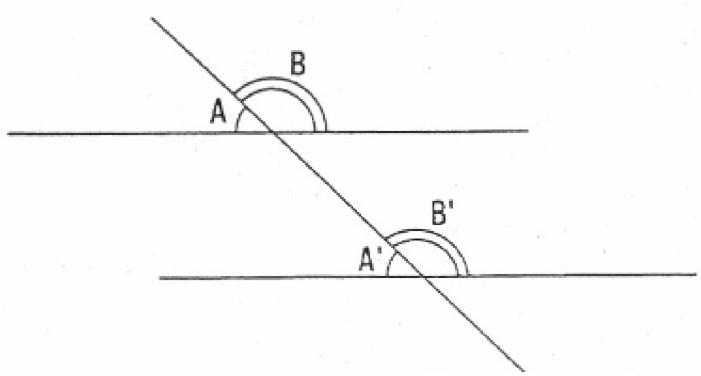


$\hat{A} = \hat{A}'$

$\hat{B} = \hat{B}'$

$\hat{A} + \hat{B} = 180°$

- **Angles correspondants**



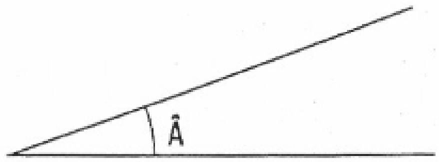
$\hat{A} = \hat{A}'$

$\hat{B} = \hat{B}'$

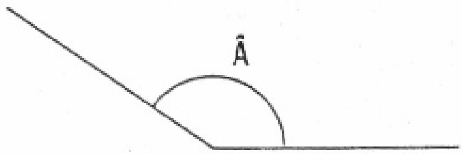
$\hat{A} + \hat{B} = 180°$

Exercices :

- Donnez le nom des angles repères A.



Â est un angle_ _ _ _ _ _ _

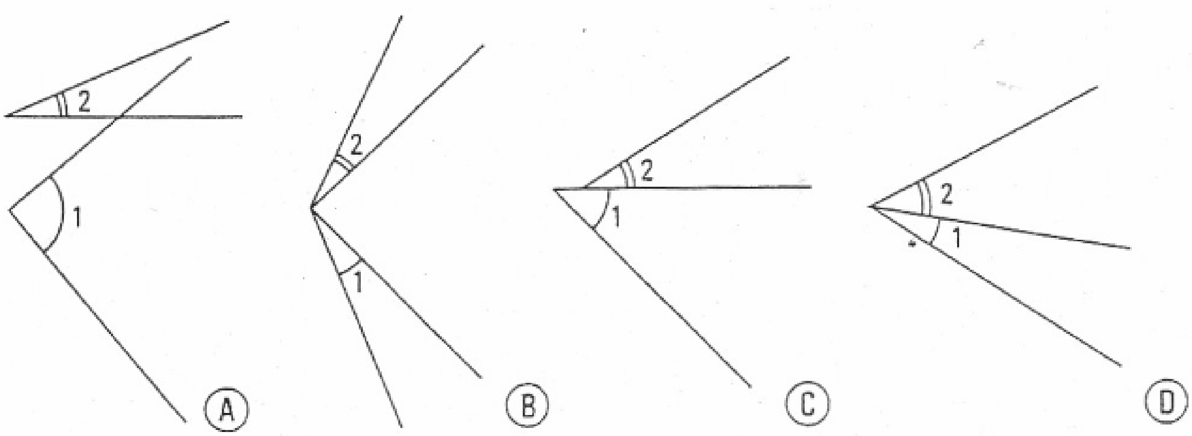


Â est un angle_ _ _ _ _ _ _

- Examinez successivement les figures A ; B ; C ; D.

  Les angles 1 et 2 sont-ils adjacents ?

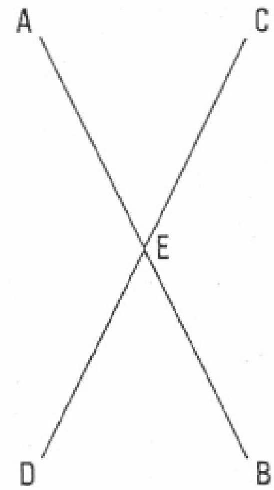
  Justifiez votre réponse.



Les angles

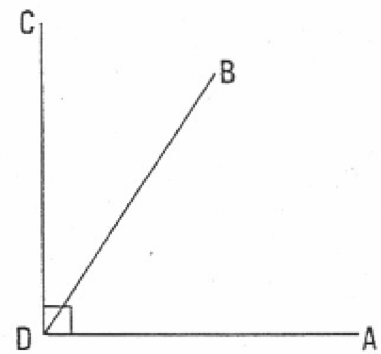
Les angles $\widehat{AEC}$ et $\widehat{BED}$ sont dits : ____________

Ils sont : ____________



Les angles $\widehat{ADB}$ et $\widehat{BDC}$ sont dits : ____________

$\widehat{CDA}$ est un angle ____________

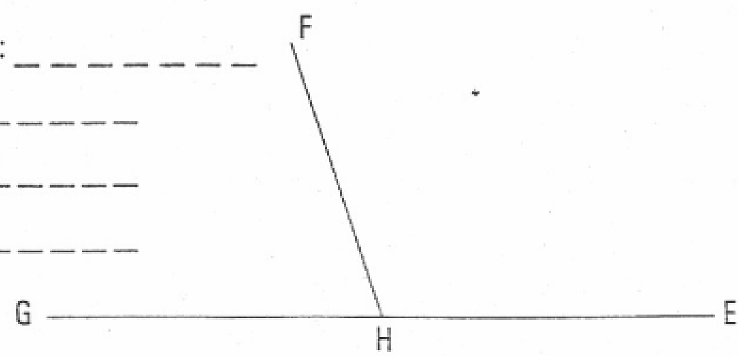


Les angles $\widehat{FHE}$ et $\widehat{GHF}$ sont dits : __________

$\widehat{GHF}$ est un angle ____________

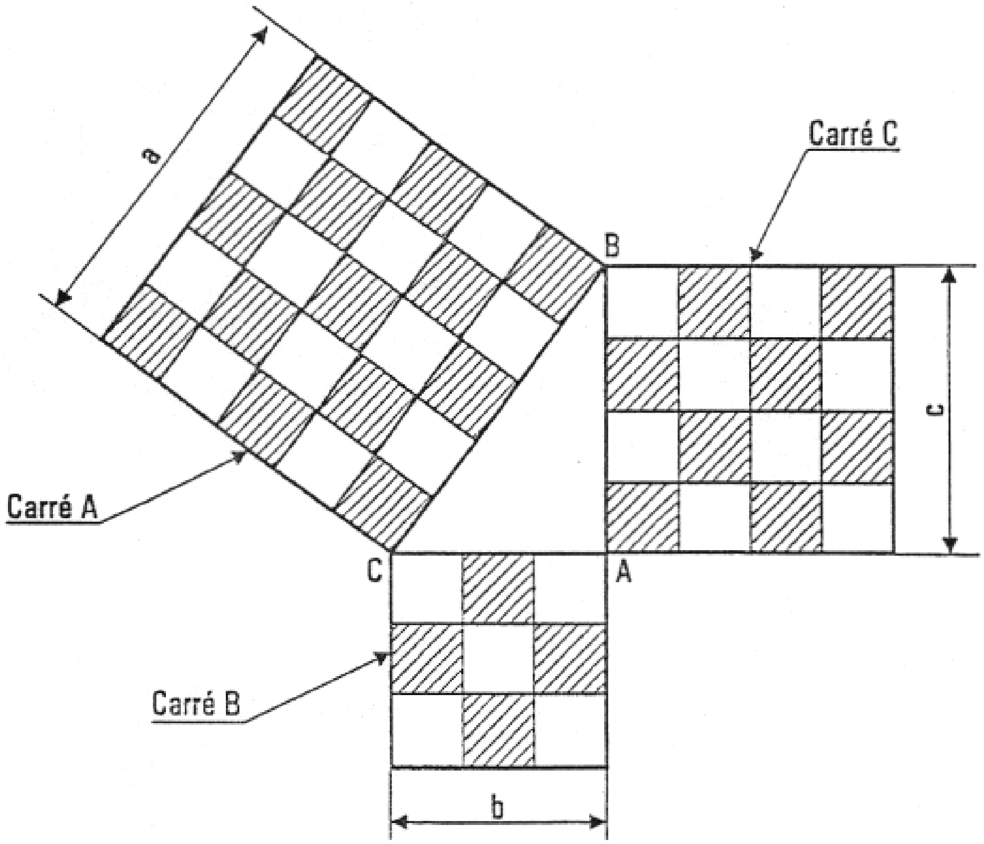
$\widehat{FHE}$ est un angle ____________

$\widehat{GHE}$ est un angle ____________



Théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle, l'aire du carré de l'hypoténuse est égale à la somme des aires des carrés construits sur les deux côtés de l'angle droit.



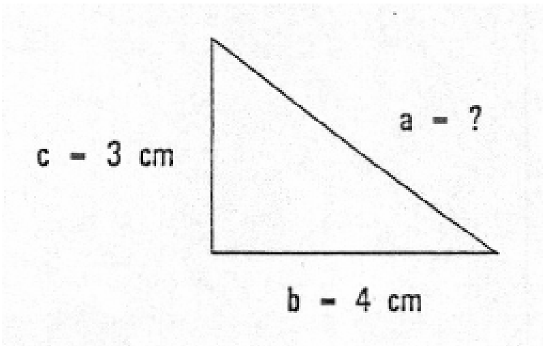
$$\overline{CB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

$$\overline{CB} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2}$$

Donc : $\mathbf{a^2=b^2+c^2}$ **;** $\mathbf{5^2 = 3^2 + 4^2}$

Exercices :

1)

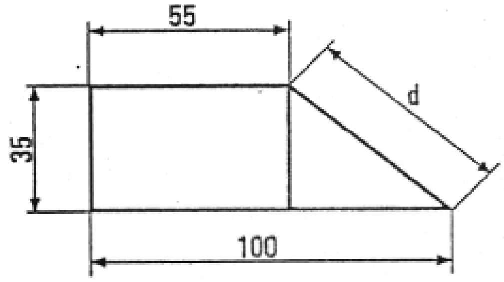


Soit le triangle ci-dessus, calculez **a.**

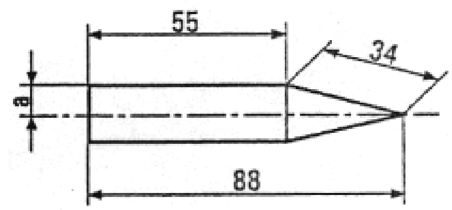
2) Calculez la diagonale et la surface d’un rectangle dont a longueur mesure 8 cm et la largeur 7 cm.

3) L’hypoténuse d’un triangle mesure 41 cm et un côté de l’angle droit mesure 24cm.
Calculez l’autre côté.

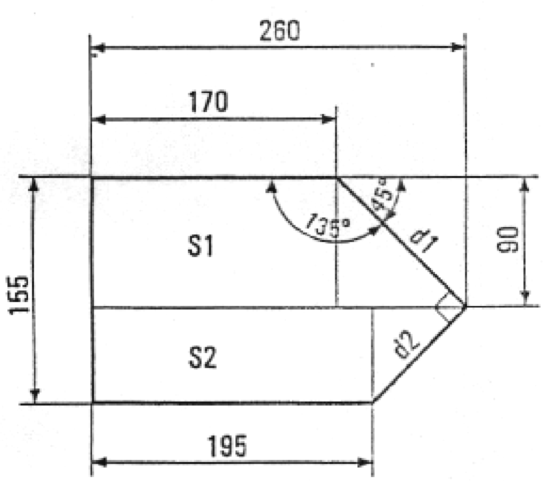
- Calculez le périmètre et la surface



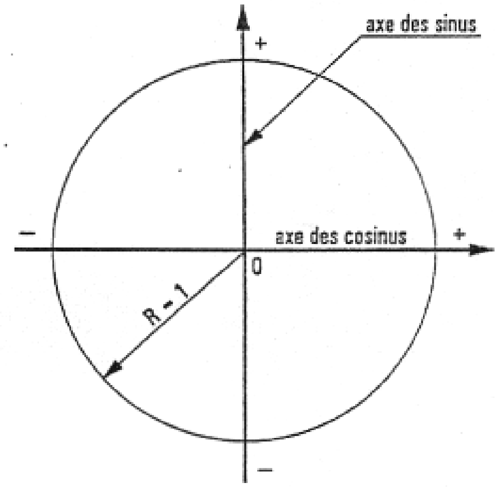
- Calculez le périmètre et la surface.



- Calculez le périmètre et la surface

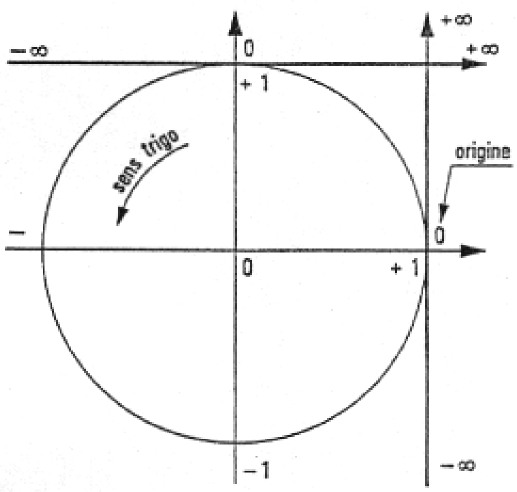


Cercle trigonométrique



C'est un cercle de rayon R = 1 par définition construit sur deux axes dirigés et dans lequel on se propose de mesurer des angles par des segments rectilignes, portés par des axes et appelés lignes trigonométriques.

Les deux axes principaux passent par l'origine 0 et ils sont limités de - 1 à + 1.

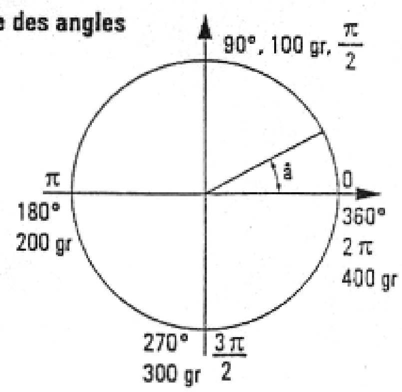


Deux autres axes sont construits respectivement tangent au cercle à l'abscisse + 1 et à l'ordonnée + 1. Ils ne sont pas limités.

Sens trigonométrique

C'est le sens de rotation adopté pour inscrire un angle à l'intérieur du cercle.
C'est le sens inverse de celui d'une horloge.

Mesure des angles



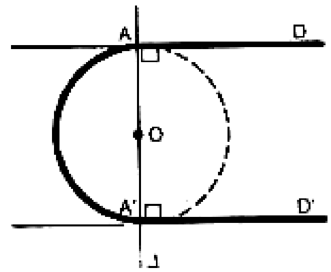
On sait qu'un angle peut être caractérisé par un nombre exprimant sa mesure en degré, en grade, en radian.

Mais dans le cercle trigonométrique de rayon R = 1 un angle â peut aussi être défini par une mesure linéaire exprimée dans la même unité que celle choisie pour le rayon (sinus, cosinus ou tangente).

RACCORDEMENT

1) RACCORDEMENT DE DEUX DROITES PAR UN CERCLE

a) Premier cas : les droites données D et D' sont parallèles



Construction.

Une droite 0 perpendiculaire à D et D' coupe D en A et D'en A'; on construit le milieu de [AA'] et on trace le cercle de diamètre [AA'].

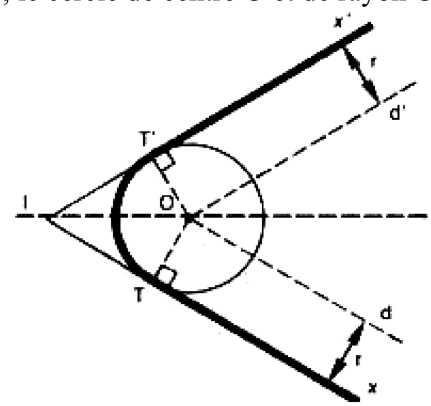
Justification.

D et D' sont perpendiculaires au diamètre [AA']; elles sont donc tangentes au cercle.

b) Second cas : raccorder deux droites concourantes par un cercle de rayon donné r

Construction.

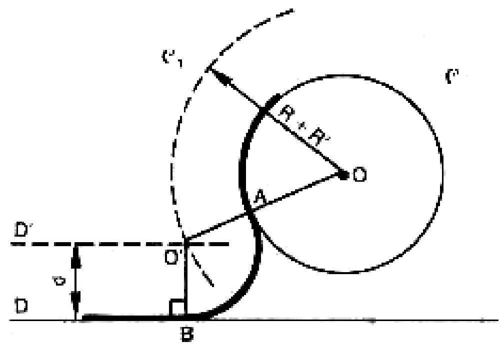
On mène deux parallèles à Ix et Ix' à la distance r; ces droites se coupent en O; on projette orthogonalement O sur Ix et Ix'; le cercle de centre O et de rayon OT est le cercle cherché.



Justification.

OT = OT' = r et (OT) $\perp$ (Ix) et (OT') $\perp$ (Ix')

2) RACCORDEMENT D'UNE DROITE ET D'UN CERCLE PAR UN CERCLE DE RAYON DONNÉ



Soit une droite D et un point O dont la distance à D est égale à 4 cm. Raccorder le cercle C de centre O, de rayon R égal à 3 cm et la droite D par un cercle C' de rayon R' égal à 2 cm.

Construction.

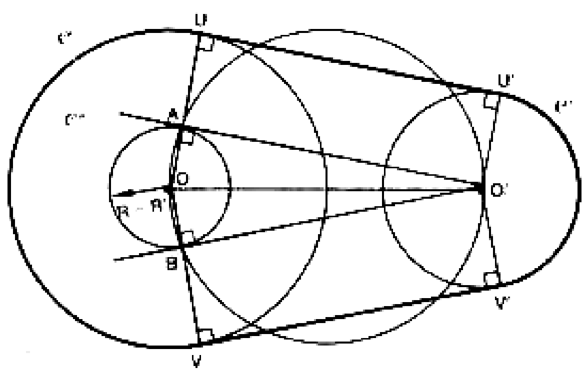
Le centre O' du cercle C' appartient à la droite D' menée parallèlement à D à une distance d égale à 2 cm et au cercle C, de centre O et de rayon R, égal à R + R' soit 5 cm.

Les points de contact sont A, intersection de [OO'] avec C et B, projection orthogonale de O' sur D. Il existe quatre raccordements possibles : deux qui sont symétriques par rapport à (OO') et deux autres symétriques des précédents par rapport à la perpendiculaire menée de O à D.

3) RACCORDEMENT DE DEUX CERCLES PAR UNE DROITE

a) Tangentes communes extérieures à deux cercles

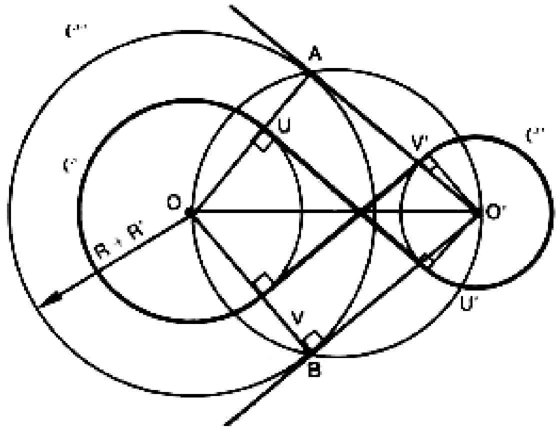
Considérons les cercles C (O,R) et C' (O',R') et supposons R > R'.



Le cercle de diamètre [OO'] coupe le cercle C'' de centre O et de rayon R - R' en A et B. Les droites (O'A) et (O'B) sont tangentes à C''.
Les demi-droites OA et OB coupent le cercle C en U et V. La parallèle à (O'A) menée de U est tangente au cercle C' en U'. De même la parallèle à (O'B) menée de V est tangente au cercle C' en V.

b) Tangentes communes intérieures à deux cercles

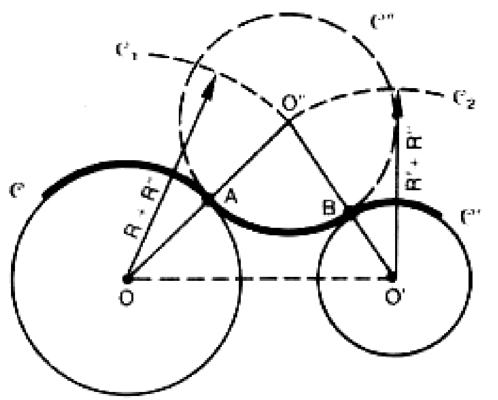
Considérons les cercles C(O, R) et C'(O'. R')



Le cercle de diamètre [OO'] coupe le cercle C''(O, R + R') en A et B. La parallèle menée de U à (O'A) est tangente en U' au cercle C'. De même, la parallèle menée de V à est tangente en V' au cercle C'.
Si O' est extérieur au disque D'' (0, R -+ R'), c'est-à-dire si OO' > R + R', il existe donc deux tangentes communes intérieures à C et C'.

4) RACCORDEMENT DE DEUX CERCLES PAR UN CERCLE DE RAYON DONNÉ

Noter deux points O et O' tels que OO' = 7 cm. Tracer le cercle C de centre O, de rayon R égal à 3 cm et le cercle C' de centre O', de rayon R' égal à 2 cm. Raccorder ces deux cercles par un cercle C'' de rayon R'' égal à 3 cm.



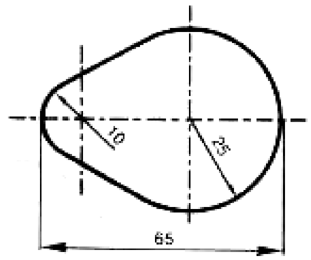
Le centre O'' du cercle C'' est tel que :

$$O''O = R+R''= 6 \text{ cm} \quad \text{et} \quad O''O' = R'+R'' = 5 \text{ cm}.$$

Il est donc commun aux cercles C_1 (0, R + R'') et C_2(O', R'+ R'').
Les points de contact sont A, intersection de C et de [OO''] et B, intersection de C' et de [O'O''].

EXERCICES

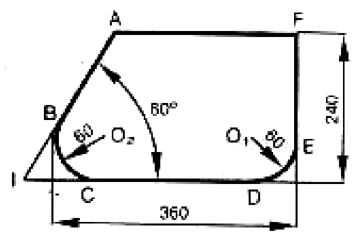
1. La section d'une canalisation a la forme indiquée ci-dessous.



Deux axes de cercle de rayons respectivement égaux à 25 mm et 10 mm sont raccordés par deux droites.

Représenter cette section à l'échelle 1.

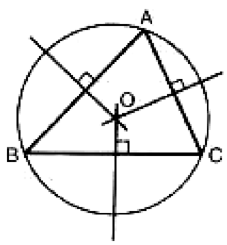
2. Dessiner à l'échelle 0,25 la section du réservoir représentée par la figure ci-dessous (cotes en mm).



FIGURES USUELLES TRIANGLES

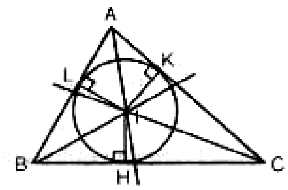
1) DROITES REMARQUABLES

<table>
<tr>
<td>
Médiatrices; cercle circonscrit



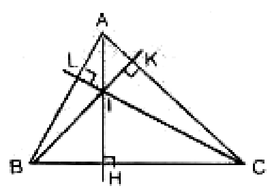
O point d'intersection des médiatrices est le centre du cercle circonscrit

OA = OB = OC
</td>
<td>
Bissectrices; cercle inscrit

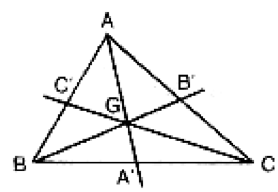


I point d'intersection des bissectrices est le centre du cercle inscrit

IH = IK = IL
</td>
</tr>
<tr>
<td>
Hauteurs; orthocentre



I point d'intersection des hauteurs est appelé orthocentre du triangle.
</td>
<td>
Médianes; centre de gravité



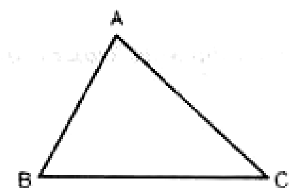
G point d'intersection des médianes est appelé centre de gravité du triangle

GA = 2GA'
</td>
</tr>
</table>

Exercice.
Construire un triangle ABC tel que BA = 4 cm; BC = 5 cm; $A\hat{B}C = 115°$.
Construire l'orthocentre.

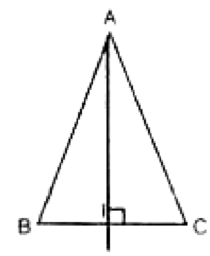
2) ANGLES D'UN TRIANGLE. TRIANGLES PARTICULIERS

Somme des angles



$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180°$

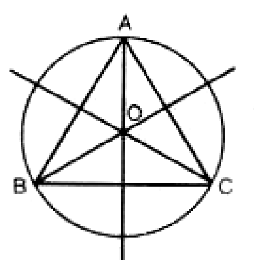
Triangle isocèle



La médiatrice de [BC] est axe de symétrie du triangle.

$AB = AC;\ \hat{B}=\hat{C}$

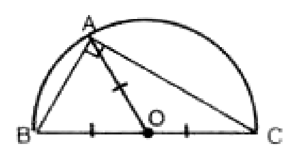
Triangle équilatéral



Les médiatrices sont axes de symétrie

$AB = BC = CA;\ \hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=60°$

Triangle rectangle



hypoténuse : [BC]; O milieu de [BC]

$OA = OB = OC$
$\hat{A}=90°;\ \hat{B}+\hat{C}=90°$

EXEMPLES

1. Soit un triangle ABC tel que $\hat{A} = 37°$ et $\hat{B} = 68°$; $\hat{C}$ est tel que $37 + 68 + \hat{C} = 180$
   D'où $\hat{C} = 180 - (37+68) = 75°$.

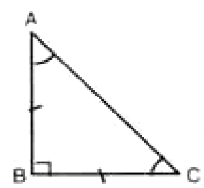
2. Un triangle isocèle ABC est tel que AB = AC et $\hat{B} = 42°$; calculons $\hat{C}$ et $\hat{A}$

AB = AC donc $\hat{B} = \hat{C} = 42°$
$\hat{A} + \hat{B} + C = 180$ soit $\hat{A} + 84 = 180$

D'où : $\hat{A} = 180 - 84 = 96°$.

3. Triangle rectangle isocèle.

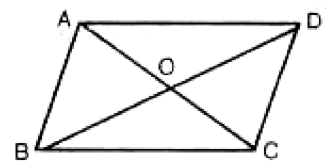
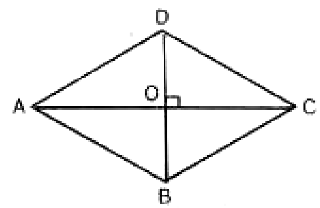
Soit un triangle ABC rectangle en A tel que AB= AC; il est tel que $\hat{A} = 90°$; $\hat{B} = \hat{C} = 45°$.



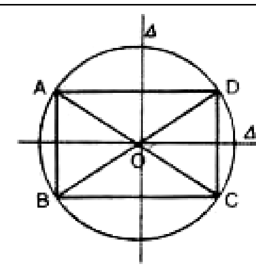
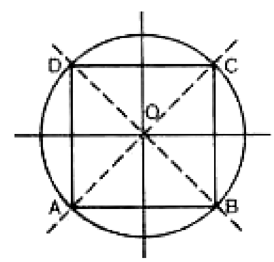
Exercice 2. Un triangle ABC rectangle en A est tel que $\hat{B} = 26°30'$; calculer $\hat{C}$.

QUADRILATERES

1) PARALLÉLOGRAMME ET LOSANGE

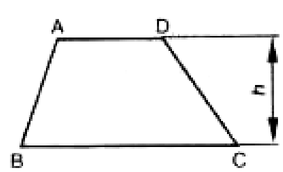
Parallélogramme - les diagonales se coupent en leur milieu; - les côtés opposés sont parallèles et de même longueur; - les angles opposés ont même mesure; - les angles consécutifs sont supplémentaires.	
Losange - les côtés ont même longueur; - c'est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires	

2) RECTANGLE ET CARRÉ

Rectangle - les quatre angles sont droits; - les diagonales se coupent en leur milieu et ont même longueur; - le rectangle possède deux axes de symétrie.	
Carré - les quatre côtés ont même longueur; - les quatre angles sont droits; - les diagonales se coupent en leur milieu elles ont même longueur et sont perpendiculaires; - le carré possède quatre axes de symétrie.	

3) TRAPÈZE

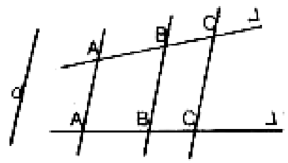
C'est un quadrilatère qui a deux côtés parallèles; les côtés parallèles sont les bases du trapèze; h désigne la hauteur.
Si l'un des angles du trapèze est droit, ce trapèze est un trapèze rectangle.

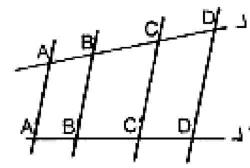


PROPRIETE DE THALES

1. Propriété de Thalès et conséquences

Les points A, B, C, D de la droite Δ se projettent parallèlement à d sur la droite Δ' en A', B', C', D'.





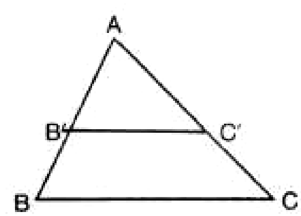
$$\boxed{\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}}$$

$$\boxed{\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD}}$$

2. Application au triangle

Si les droites (BC) et (B'C') sont parallèles alors

.

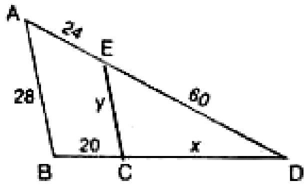


$$\boxed{\frac{A'B'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}}$$

Les triangles ABC et AB'C' sont dits homothétiques

EXEMPLES

1. Les droites (AB) et (CE) sont parallèles; calculer x et y.



Calcul de x.

$\frac{DC}{DE} = \frac{BC}{AE}$ (conséquence de la propriété de Thalès)

soit : $\frac{x}{60} = \frac{20}{24}$ d'où : 24 x = 60 x 20

$$x = \frac{60 \times 20}{24} = 5 \text{ x } 10 = 50$$

Calcul de *y*.

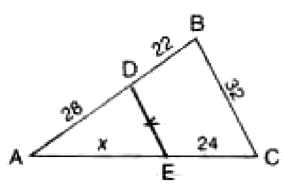
Les triangles DCE et DBA sont homothétiques

Donc : $\frac{CE}{AB} = \frac{DE}{DA}$ soit : $\frac{y}{28} = \frac{60}{84}$

D'où : 84y = 60 x 28; $y = \frac{60 \times 28}{84} = 20$

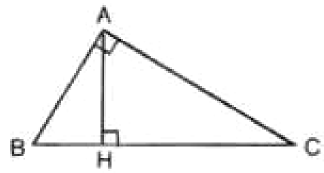
EXERCICE .

Les droites (DE) et (BC) sont parallèles; calculer x et y.



TRIANGLE RECTANGLE

1) RELATIONS MÉTRIQUES



Considérons un triangle ABC rectangle en A; H désigne le pied de la hauteur issue de A.
On peut écrire :

$AB^2 + AC^2 = BC^2$ (relation de Pythagore)

$BA^2 = BH \times BC$ et $CA^2 = CH \times CB$

$HA^2 = HB \times HC$

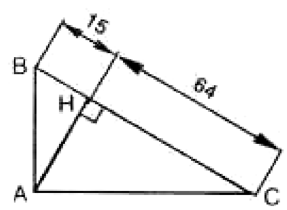
$HA \times BC = AB \times AC$.

Étant donné un triangle ABC

- si $AB^2 + AC^2 = BC^2$ alors ce triangle est rectangle en A;
- si $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$ alors ce triangle n'est pas rectangle en A.

2) APPLICATION

Soit le triangle ABC rectangle en A; calculer AH, AB et AC



Calcul de AH.

Dans le triangle rectangle ABC
$AH^2 = HB \times HC$ soit $AH^2 = 15 \times 64$ d'où $AH = \sqrt{15 \times 64} = 8\sqrt{15}$

$AH = 30{,}98$

Calcul de AB et AC.

$BA^2 = BH \times BC$ soit : $BA^2 = 15 \times 79 = 1\,185$ d'où : $BA = \sqrt{1185}$

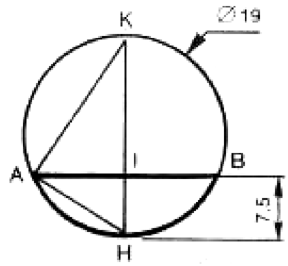
$BA = 34{,}4$

$CA^2 = CH \times CB$ soit : $CA^2 = 64 \times 79 = 5056$ d'où : $CA = \sqrt{5056}$

$CA = 71{,}1$.

Exercice.

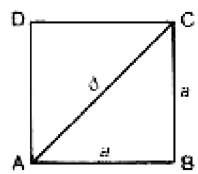
Calcul de la cote d'une clavette disque.



En notant que le triangle HAK est inscrit dans un demi-cercle, donc est rectangle, calculer AB.

3) DIAGONALE DU CARRÉ. HAUTEUR DU TRIANGLE ÉQUILATÉRAL

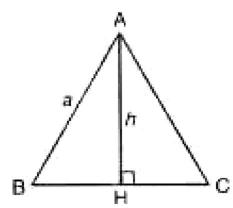
a) Diagonale du carré



$$d = a\sqrt{2}$$

$$d \approx 1{,}414\ a$$

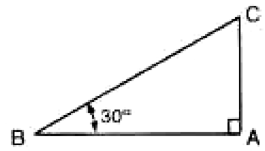
b) Hauteur du triangle équilatéral



$$h = a\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$h \approx 0{,}866\ a$$

c) Une figure remarquable



$\hat{B} = 30°$ $AC = \frac{1}{2} BC$

$\hat{C} = 60°$ $AB = BC \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

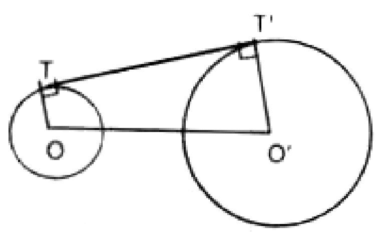
EXEMPLE

Soit un triangle équilatéral dont les côtés mesurent 5 cm; la hauteur de ce triangle est donnée par :

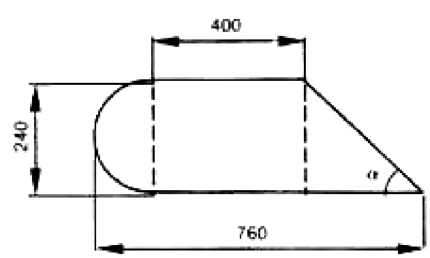
$h = 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ soit h = 4,33 cm.

Exercices

1) La droite (TT') est tangente au cercle C de rayon 15 cm en T et au cercle C' de rayon 50 cm en T' OO' = 90 cm. Calculer TT'.

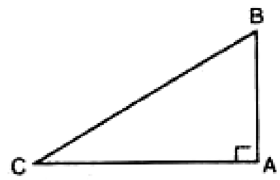


2) La figure ci-dessous représente la section d'un réservoir; quelle est la mesure de l'angle **α** ? Calculer le périmètre de la section (cotes en mm).



RELATIONS TRIGONOMETRIQUES DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

1) RAPPELS



Soit un triangle ABC rectangle en A; notons par commodité d'écriture B et C les mesures des angles : $A\hat{B}C$ et $B\hat{C}A$. On retiendra que :

$$\cos C = \frac{\text{mesure du coté adjacent}}{\text{mesure de l'hypoténuse}} = \frac{CA}{CB}$$

$$\sin C = \frac{\text{mesure du coté opposé}}{\text{mesure de l'hypoténuse}} = \frac{AB}{CB}$$

$$\tan C = \frac{\text{mesure du coté opposé}}{\text{mesure du coté adjacent}} = \frac{AB}{CA}$$

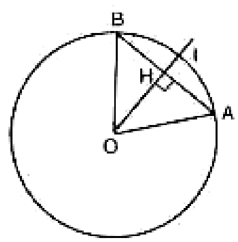
Vérifiez que cos B = sin C et que sin B = cos C.

Exercice.

Vérifier que le triangle ABC tel que AB =8, AC=15, BC =17 est rectangle en A; calculer cos B, sin B, tan B; donner la mesure de l'angle ABC.

2) APPLICATIONS

a) Longueur et flèche d'une corde



Soit à calculer la longueur et la flèche de la corde [AB]; le rayon du cercle est 100 mm et $A\hat{O}B$ = 72°.

Calcul de la longueur de la corde.

AB = 2 AH; calculons AH.

Dans le triangle OAH rectangle en H :

$$A\hat{O}H = \frac{72}{2} = 36° \quad \text{et} \quad \sin 36° = \frac{AH}{OA} \quad \text{soit} \quad \sin 36° = \frac{AH}{100}$$

d'où AH =100 x sin 36° donc AB = 200 x sin 36°

AB = 117,56 mm.

Calcul de la flèche.

La flèche f est la longueur HI;

HI = OI - OH; calculons OH.
Dans le triangle rectangle OAH

$\cos 36° = \frac{OH}{OA}$ soit $\cos 36° = \frac{OH}{100}$ d'où OH =100 x cos 36°

donc : HI =100 -100 x cos 36°; HI=19,1

f =19,1 mm.

b) Pente

Définition.

Soit un triangle ABC .

On appelle pente de la droite (BC) par rapport à la droite (AC) le rapport $\frac{AB}{AC}$ c'est-à-dire la tangente de l'angle $B\hat{C}A$

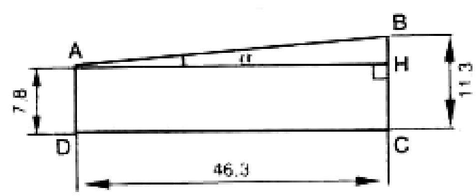
$$\boxed{p = \tan C}$$

EXEMPLES

1. Pente d'une route.

Dire qu'une route a une pente de 0,08 (ou de 8 %) cela veut dire que si (BC) représente la route, lorsque AC =100 m alors AB= 8 m.

2. Pente d'une clavette ou d'une cale.

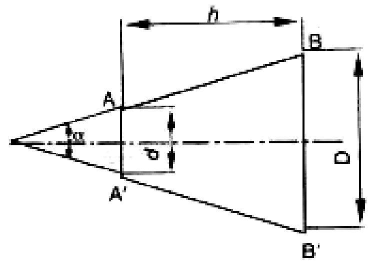


La pente de la cale représentée par la figure est $p = \tan \alpha = \frac{11,3 - 7,8}{46,3} = \frac{3,5}{46,3}$

$p \approx 0,075$ ou 7,5 %.

3. Conicité.

Considérons la pièce conique représentée par la figure ci-dessous :



l'angle du cône est α;

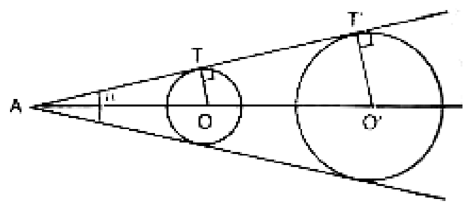
la pente du cône est : $p = \tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{D-d}{2h}$

la conicité du cône est : $C = 2\,p = \dfrac{D-d}{h}$

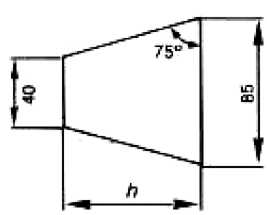
Exemple : si $D = 32$; $d = 26$; $h = 23$; la conicité est : $C = \dfrac{32-26}{23} = \dfrac{6}{23} = 0{,}26$ (ou 26%).

Exercices

1. Calculer l'angle a déterminé par les tangentes communes extérieures aux cercles C et C' de rayons R =20 cm et R'=30 cm; OO' = 90 cm .

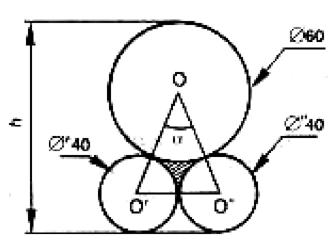


2. On considère la pièce tronconique représentée par la figure ci-dessous (cotes en mm);



calculer h; quelle est la conicité de la pièce?

3. Trois canalisations sont juxtaposées comme l'indique la figure ci-dessous.



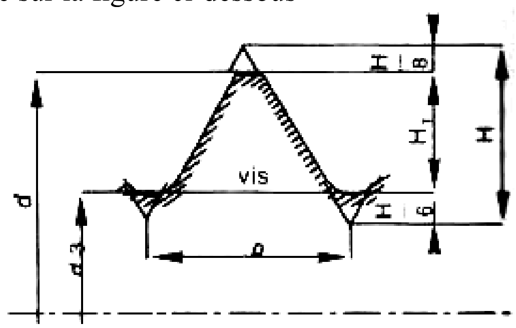
1° Calculer $\boldsymbol{\alpha}$ et h.
2° Calculer l'aire de la surface hachurée.

TRIGONOMETRIE APPLIQUEE A LA MECANIQUE

I. FILETAGE A PROFIL ISO

1) DÉFINITION

Le profil ISO est défini à partir d'un triangle équilatéral de côté égal au pas et ayant sa à base parallèle à l'axe du filetage.
Considérons la vis représentée sur la figure ci-dessous



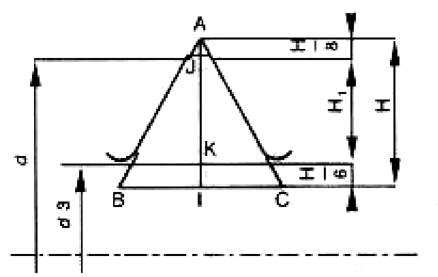
Les éléments de la vis sont :

- le pas : p;
- le diamètre nominal d;
- le diamètre du noyau d3.

Problème

On considère une vis de diamètre nominal d = 10 mm et de pas p = 1,5 mm. Calculer :
1. la cote H et la profondeur du filet H,;
2. le diamètre d3 du noyau et la section du noyau.

1. Calcul de H.



Dans le triangle équilatéral ABC, H = AI

d'où H-= BC x $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (hauteur du triangle équilatéral) donc H = p $\frac{\sqrt{3}}{2}$

soit : $H = 1,5 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$; $H = 1,299$ mm.

Calcul de H_1

$H_1 = JK = AI - AJ - KI$ soit $H_1 = H - \frac{H}{8} - \frac{H}{6} = \frac{24H - 3H - 4h}{24} = \frac{17}{24}H$

d'où : $H_1 = \frac{17}{24} \times 299$; **H = 0,920 mm**.

2. Calcul de d3.

$\frac{d_3}{2} = \frac{d}{2}$ d'où : $d_3 = d - 2JK$

soit : $d_3 = 10 - 2\ H_1 = 10 - 2 \times 0{,}920$; d3 =8,160 mm.

Calcul de la section du noyau.

La section du noyau est $s = \pi\ \frac{d_3^2}{4}$ soit $s = \pi \frac{(8{,}160)^2}{4}$

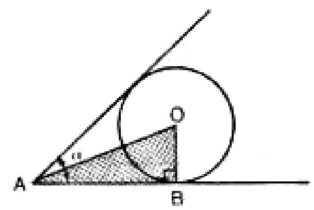
s = 52,3 mm2.

Exercice.

Reprendre le problème précédent pour une vis de diamètre nominal d = 6 mm et de pas p = 1 mm.

II. COTES SUR PIGES

a) Calcul préliminaire
Considérons la figure ci-dessous; soit d le diamètre du cercle, calculer AB en fonction de d et α.



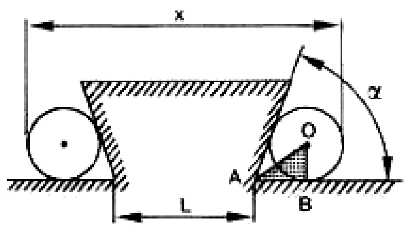
Dans le triangle OAB rectangle en B

$A = \frac{\alpha}{2}$ et $\tan A = \frac{OA}{AB}$ soit $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2\ AB}$

d'où : $AB = \frac{d}{2\ \tan\frac{\alpha}{2}}$

1) Application numérique.

a) Vérification d'une queue d'aronde mâle.



Problème.

L'angle a est connu; la cote L est inaccessible; pour la contrôler on utilise deux piges cylindriques de même diamètre d et on contrôle au pied à coulisse la cote de vérification x.

Calcul de x;

r étant le rayon des piges on a : $x = L + 2AB + 2\ r = L + 2\ AB + d$

dans le triangle OAB, $AB = \dfrac{d}{2\tan\frac{\alpha}{2}}$

donc : $$\boxed{x = L + d + \dfrac{d}{2\tan\frac{\alpha}{2}}}$$

EXEMPLE

L = 65 mm, d =10 mm, α = 60°

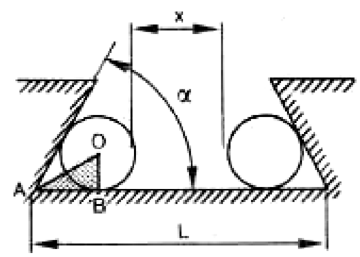
$x = 65 + 10 + \dfrac{10}{\tan 30}$;

x = 92,321

Exercice .

Calculer x si α = 50°, L = 60 mm, d = 12 mm.

b) Vérification d'une queue d'aronde femelle.



Problème.

L'angle α est connu; pour contrôler la cote L inaccessible on introduit deux piges cylindriques de même diamètre d et on contrôle la cote de vérification x.

Calcul de x;

r désignant le rayon des piges, on a : L = x + 2 r + 2 AB = x + d + 2 AB

dans le triangle OAB, $AB = \dfrac{d}{2\tan\frac{\alpha}{2}}$

donc : $L = x + d + \dfrac{d}{2\tan\frac{\alpha}{2}}$

d'où : $x = L - d - \dfrac{d}{2\tan\frac{\alpha}{2}}$

Application.

L = 75 mm, d =18 mm, α = 50°

$x = 75 - 18 - \dfrac{18}{\tan 25°}$; x =18,399 mm.

Exercice.

Calculer x si $\alpha = 60°$, L = 70 mm, d = 20 mm.

c) Contrôle d'un filetage a profil ISO

On utilise trois piges de même diamètre d comme l'indique la figure 1, soit D le dia nominal; on contrôle la cote de vérification x.

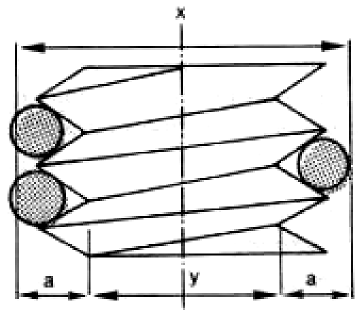


fig.1

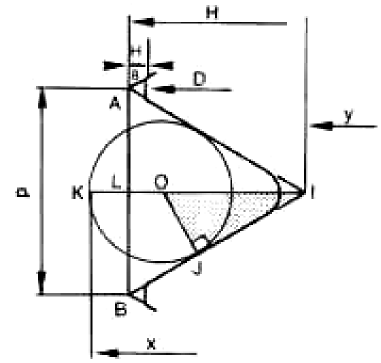


fig.2

On note (fig. 2) que x = y + 2 OI + 2 OK dans le triangle OIJ rectangle en J

$O\hat{I}J = 30°$ donc : OI = 20J = d

d'où : $x = y + 2d + d = y + 3d$.

Calculons y en fonction du diamètre nominal D et du pas p :

$$\frac{y}{2} = \frac{D}{2} - \left(H - \frac{H}{8}\right) = \frac{D}{2} - \frac{7H}{8}$$

d'où : $y = D - 7\,\frac{H}{4}$

H est la mesure de la hauteur du triangle équilatéral IAB, donc $H = p\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

d'où : $y = D - \frac{7}{4}\,p\,\frac{\sqrt{3}}{2} = D - \frac{7}{8}\,p\,\sqrt{3}$

donc : $x = D + 3d - \frac{7}{8}\,p\,\sqrt{3}$

Pratiquement : $\boxed{\boldsymbol{x = D + 3\,d - 1{,}516\,p}}$.

EXEMPLE

Pour D = 22 mm, p=2,5, d =2 mm; x =22-1,515 x 2,5 + 3 x 2 = 24,21 mm.

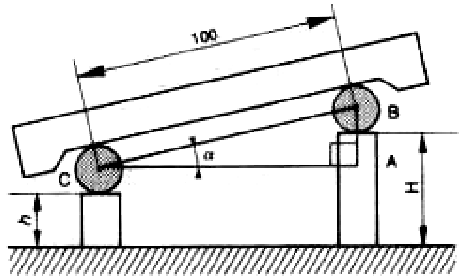
Exercice.

Calculer x pour D = 39 mm, p = 4 mm, d = 3 mm.

d) Contrôle à l'aide d'un appareil sinus

Problème.

Au moyen d'une règle sinus, contrôler l'angle α d'une cale ou d'un tampon.



Des cales étalons permettent de déterminer h et H; calculons α dans le triangle ABC rectangle en A,

AB = H - h et BC = 100

D'où : $\boxed{\sin \alpha = \frac{H-h}{100}}$

EXEMPLE

H = 34,25 mm, h = 15,36 mm;

$\sin \alpha = \frac{34{,}25-15{,}36}{100} = \frac{18{,}89}{100} = 0{,}1889$

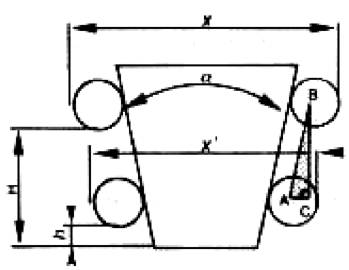
d'où : $\alpha = 10{,}8886° \rightarrow \alpha = 10°\ 53'\ 19''$.

Exercice.

Calculer α pour H = 21,63 mm et h =14 mm.

e) Contrôle de l'angle d'un cône mâle

On utilise des piges de même diamètre d comme l'indique la figure ci-dessous; des cales étalons permettent de déterminer h et H.



Dans le triangle ABC rectangle en C

$A\hat{B}C = \frac{\alpha}{2}$; $BC = H - h$; $AC = \frac{x - x'}{2}$

$\tan B = \frac{AC}{BC}$ d'où : $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{x - x'}{2}}{H - h} \Rightarrow \boxed{\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{x - x'}{2(H - h)}}$

EXEMPLE

h = 10 mm; H = 52 mm; x = 129,13 mm; x' = 45,52 mm.

$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{129{,}13 - 45{,}52}{2(52 - 10)} = 0{,}995\ 4$; on obtient à la calculatrice $\frac{\alpha}{2} = 44{,}866$ ...

d'où : $\alpha = 89{,}7334°$; $\alpha = 89° \; 44'$

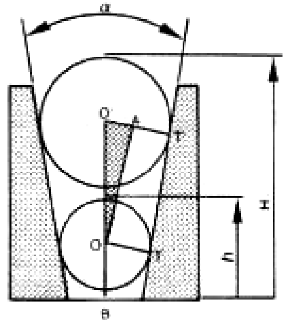
REMARQUES

1. Le diamètre des piges n'intervient pas dans le résultat.
2. Si C désigne la conicité du cône, $\tan \frac{\alpha}{2} = 2\,C$.

EXERCICE.

Calculer α pour h =12 mm; H = 70 mm; x = 68,27 mm; x' = 45,72 mm.

f) Contrôle de l'angle d'un cône femelle



Problème.

Pour vérifier l'angle α du cône, on utilise des billes de diamètre D = 30 mm et d = 24 mm; on note à l'aide de cales étalons : H = 64,82 mm et h = 25,31 mm; calculer α.
Dans le triangle OO'A rectangle en A :

$$O'A = O'T' - OT = \frac{D-d}{2} \quad ; O'\hat{O}A = \frac{\alpha}{2}; \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{O'A}{OO'}$$

Calculons OO' en fonction de H, h, d et D.

$$OO' = BO' - BO; \quad BO' = H - \frac{D}{2} \quad \text{et} \quad BO = h - \frac{d}{2}$$

$$\text{d'où : } \quad OO' = H - \frac{D}{2}\left(h - \frac{d}{2}\right) = H - h - \frac{D}{2} + \frac{d}{2} = H - h - \frac{D-d}{2}$$

$$\text{Soit : } \quad OO' = \frac{2(H-h)-(D-h)}{2}$$

$$\text{On en déduit:} \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{D-d}{2}}{\frac{2(H-h)-(D-d)}{2}}$$

$$\text{d'où :} \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{D-d}{2(H-h)-(D-d)}$$

Application

D = 30 mm; d = 24 mm; H = 64,82 mm; h = 25,31 mm

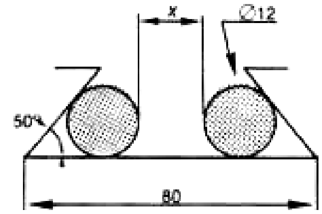
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{30-24}{2(64{,}82-25{,}31)-(30-24)} = \frac{6}{2(39{,}51)-6} = 0{,}08217$$

On obtient à la calculatrice $\frac{\alpha}{2} = 4{,}7133°$ d'où $\alpha = 9{,}426\,6°$ $\alpha = 9°\,25'36''$.

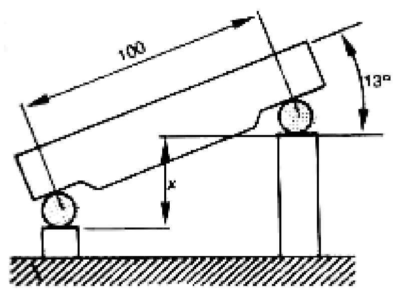
EXERCICES

1. Pour contrôler une queue d'aronde par la méthode des piges, on utilise des piges de diamètre 12 mm

Calculer x.

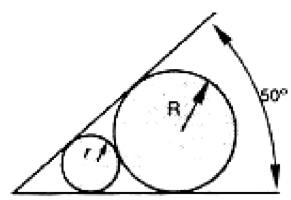


3. On contrôle à l'aide d'un appareil sinus un angle; le diamètre des piges est 15 mm; calculer x.



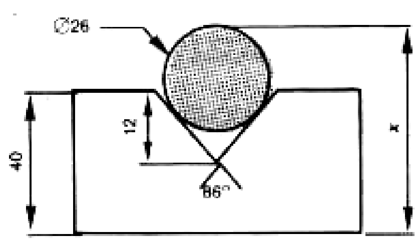
4. Pour régler une fausse équerre suivant un angle de 50° on utilise une pige de rayon r=12 mm.

Quel doit être le rayon R de la seconde pige à utiliser ?



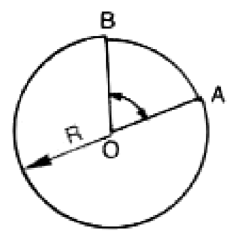
6. On contrôle l'entaille à l'aide d'une pige de diamètre 26 mm.

Calculer x.



CERCLE. ARC DE CERCLE

Longueur du cercle et d'un arc de cercle.



$$\boxed{L = 2\,\pi R \quad \text{ou} \quad L = \pi D}$$

$$l = \frac{\pi R d}{180}$$

L : longueur du cercle; l : longueur de l'arc AB; d : mesure en degrés décimaux de $A\hat{O}B$.

EXEMPLES

1. La longueur L d'un cercle de rayon 20 cm est donnée par : $L = 2\,\pi \times 20 = 40\pi$

D'où : $L = 125{,}7$ cm.

2. La longueur *1* d'un arc de cercle de rayon 25 cm dont l'angle au centre d a pour 15° est :

$$l = \frac{\pi \times 25 \times 15}{180} = \frac{\pi \times 25}{12} \quad \text{soit : } l = 6{,}54 \text{ cm}$$

3. Calculer le rayon R d'un cercle dont la longueur est L = 50 cm.

$$L = 2\,\pi R. \qquad \text{soit } 50 = 2\,\pi R. \qquad \text{d'où : } R = \frac{50}{2\,\pi} = \frac{25}{\pi}$$

R = 7,96 cm.

Exercice.

1. Calculer le rayon d'un cercle de longueur 125 cm, puis la longueur d'un arc de 20° de ce cercle.
2. Calculer la longueur d'un arc de cercle sachant que R = 1,50 m et d =12° 30'.

1) APPLICATION TECHNOLOGIQUES

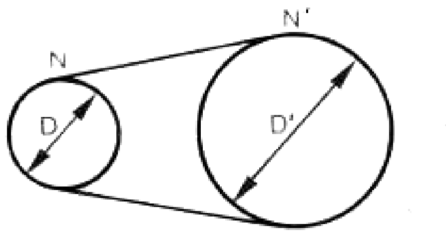
a). Poulies et engrenages

Vitesse circonférentielle.

$$V = \frac{\pi D N}{30}$$

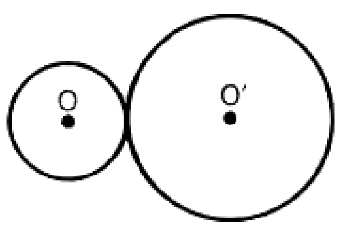
- en mètre par seconde.
- diamètre en mètre.
- nombre de tours par minute.

Transmission par poulies et courroies.



$$\boxed{\frac{N'}{N} = \frac{D}{D'}}$$

Engrenages.



$$\boxed{\frac{N'}{N} = \frac{Z}{Z'} = \frac{D_p}{D'_p}} \qquad \boxed{m = \frac{D_p}{Z} = \frac{D'_p}{Z'}}$$

N; N' nombre de tours par minute;
Z; Z' nombre de dents;
m = module;
D_p; D'_p , diamètres primitifs.

Pour une denture droite :
Pas - $p = \pi m$;
Diamètre de tête - $D_e = D_p + 2m$;
Diamètre de pied - $D_i = D_p - 2.5m$;
Diamètre primitif - $D_p = mZ$;

EXERCICES

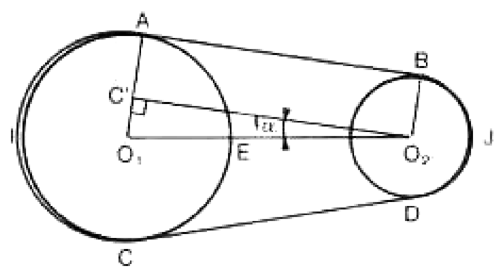
1. À l'aide de la calculatrice compléter le tableau suivant :

diamètre	45 cm			28
rayon			49 cm	
longueur du cercle		129 cm		

2. Quel doit être le diamètre d'un cercle pour que la longueur d'un arc de 24° soit égale à 40 cm ?

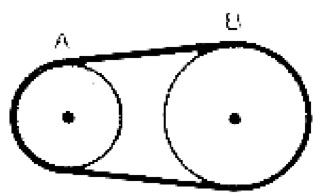
3. Une roue à denture droite a m=2 et z=27 ; Calculer : p ; D_p ; D_e ; D_i.

4. Calculer la longueur de la courroie droite représentée figure 6. R_1=20 cm, R_2=10 cm, $O_1 O_2$ = 50 cm.



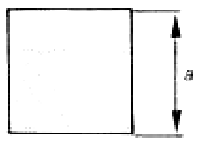
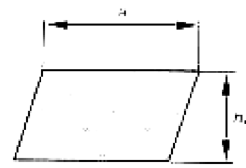
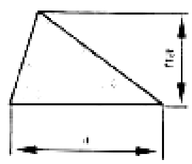
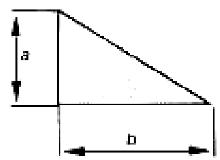
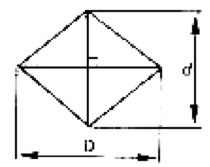
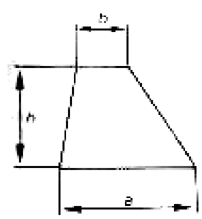
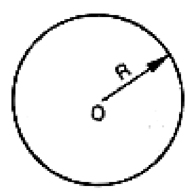
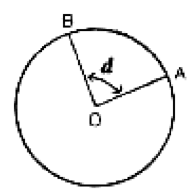
5. Une poulie de diamètre 40 mm tourne à la vitesse de 900 tr/min;
Calculer la vitesse circonférentielle en m/s.

6 Calculer la fréquence de rotation de la poulie A; D = 200 mm, D_B = 450 mm, N_B = 180 tr/min.



AIRE DES SURFACES PLANES USUELLES

1 TABLEAU RÉCAPITULATIF

Carré  $A = a \times a = a^2$	Rectangle  $A = a \times b$	Parallélogramme  $A = a \times h_a$
Triangle  $A = \frac{a \times h_a}{2}$	Triangle rectangle  $A = \frac{a \times b}{2}$	Losange  $A = \frac{D \times d}{2}$
Trapèze  $A = \frac{(a+b)h}{2}$	Disque  $A = \pi \times R^2$	Secteur circulaire  $A = \frac{\pi \times R^2 \times d}{360}$

EXEMPLES

1. Un triangle ABC rectangle en A est tel que AB = 5 cm, AC = 8 cm; calculer l'aire du triangle et la mesure du segment [BC]; en déduire la mesure h de la hauteur issue de A.

Calcul de l'aire A du triangle.

$A = \frac{1}{2} \times AB \times AC.$ $\quad$ soit $A = \frac{1}{2} \times 5 \times 8 = 20\ cm^2.$

Calcul de BC.

$BC^2 = AB^2 + AC^2.$ soit $BC^2 = 25 + 64 = 89$

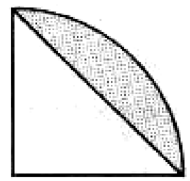
d'où : BC = $\sqrt{89}$; BC =9,43 cm.

Calcul de h.

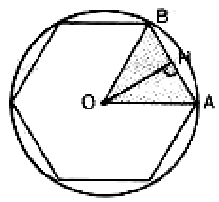
.$A = \frac{1}{2} \times h \times BC.$ $\quad$ soit $20 = \frac{1}{2} \times h \times BC^2.$ $\quad$ d'où :$h = \frac{40}{BC}$. $\quad$ soit h = $\frac{40}{9{,}43}$ $\rightarrow$ $\boldsymbol{h = 4{,}24\ cm.}$

Exercice .

1) Calculer l'aire du domaine colorié; sachant que : R = 100 mm.



2) Soit un hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon R = 15 cm
Calculer OH et l'aire de l'hexagone.

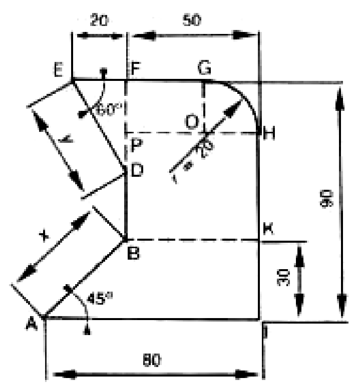


3) On note a la mesure des côtés d'un triangle équilatéral;

- calculer l'aire de ce triangle en fonction de a.
- Quelle est la longueur du côté d'un triangle équilatéral d'aire 85 cmZ?

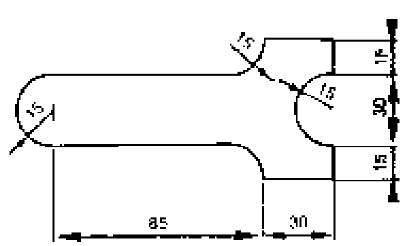
4) Sachant que l'aire d'un secteur circulaire d'angle au centre 45° est 150 cm^2, calculer le rayon du cercle.

5) On considère la pièce représentée par la figure ci-dessous (cotes en mm),



Calculer :
1° la cote x,
2° la cote y,
3° la longueur DB et l'aire de la surface de pièce.

6) Calculer l'aire de la section de l'ébauche corps de bielle représentée par la figure ci-dessous.



VOLUME ET MASSE D'UN SOLIDE

1 VOLUME D'UN SOLIDE

a) Notion de volume

On admettra que.:
Si on associe le nombre un à un cube donné, on peut associer à tout solide un nombre appelé volume, mesure de ce solide.

b) Unités de volume

On choisit pour unité de volume, le volume d'un cube dont la longueur des arêtes est l'unité de longueur.
L'unité principale est le mètre cube (m^3).
Les unités secondaires sont rappelées dans le tableau suivant

Symboles	km^3	hm^3	dam^3	dm^3	cm^3	mm^3
Valeur en m^3	10^9	10^6	10^3	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}

EXEMPLES

284 379 dm^3 = 284,379 m^3 = 0,284 379 dam^3 = 0,000 284 379 hm^3
0,0471 m^3 = 47,1 dm^3 = 47 100 cm^3 = 47 100 000 mm^3.

REMARQUE

On appelle capacité d'un récipient le volume du solide représenté par ce récipient; l'unité principale est le litre : 1*l* = 1dm^3; les unités secondaires sont des multiples décimaux et sous-multiples décimaux du litre.

2. MASSE VOLUMIQUE D'UN CORPS

a) Définition

La masse volumique d'un corps est la masse de l'unité de volume de ce corps.
L'unité légale est le kilogramme par mètre cube (kg/m^3).
On utilise aussi le gramme par centimètre cube (g/cm^3) ou le kilogramme par décimètre cube (kg/dm^3) ou la tonne par mètre cube (t/m^3).
On retiendra que : $1\ g/cm^3 = 1\ kg/dm^3 = 1\ t/m^3$

b) Calcul de la masse d'un corps

Soit un solide de volume égal à V et soit ρ la masse volumique de la matière qui le constitue.
La masse M du solide est, en utilisant les unités convenables

$$\boxed{\mathbf{M = \rho \times V}}$$

EXEMPLES

1. La masse d'une pièce de fonte (masse volumique 7,5 g/cm^3) ayant un volume de 27,6 cm^3
   M = 7,5 x 27,6 = 207 g.

2. L'essence ayant une masse volumique de 0,72 kg/dm^3, la masse d'essence contenue dans un réservoir
   de capacité 50*l*
   M = 0,72 x 50 =36 kg (on utilise ici le fait que 1*l* =1 dm^3).

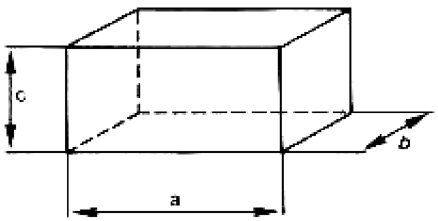
Exercice

1) Un solide de masse volumique 2 700 kg /m^3 a un volume de 450 cm^3. Quelle est sa masse?

2. Une pièce en acier (masse volumique 7700 kg/ m^3) a une masse de 1,450 kg; calculer son volume.

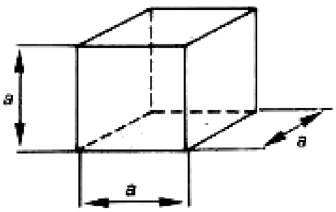
VOLUMES DES PRISMES ET PYRAMIDES

1) Parallélépipède rectangle



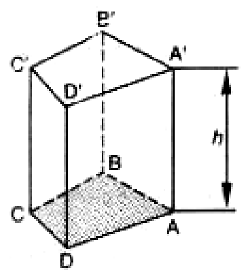
$$\boxed{V = a \times b \times c}$$

2) Cube



$$\boxed{V = a \times a \times a}$$

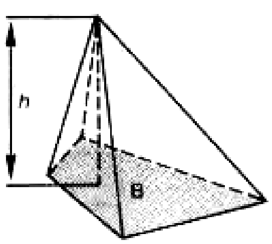
3) Prisme droit



$$\boxed{V = B \times h}$$

B : Aire de base
h = hauteur

4) Pyramide

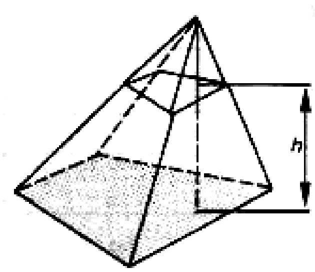


$$\boxed{V = \frac{1}{3}\ B \times h}$$

B : Aire de base

h = hauteur

5) Tronc de pyramide



$$\boxed{V = \frac{h}{3}\left(B + \sqrt{B\,B'} + B'\right)}$$

B et B' : Aire de base

h = hauteur

EXEMPLES

2. Une pyramide dont la hauteur est 4 cm a une base rectangulaire de dimensions 35 mm et 21 mm. Calculer son volume.
L'aire de la base est B = 35 x 21 = 735 mm^2 = 7,35 cm^2

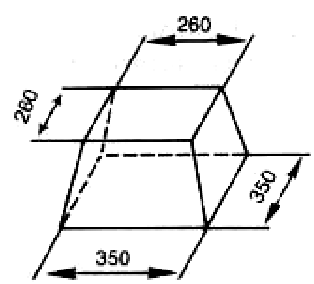
et $V = \frac{B \times h}{3} = \frac{7,35 \times 4}{3} = 9,8 cm^3$.

EXERCICES.

1) Quel est le volume du parallélépipède rectangle dont les longueurs des arêtes sont égales à 40 mm, 5 cm et 21 mm.

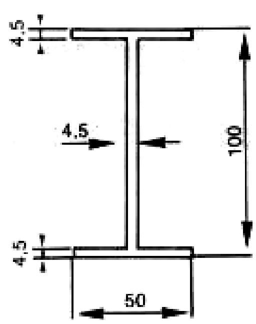
2) Une pyramide régulière a pour hauteur h et pour base un losange dont les mesures des diagonales sont
D et d; calculer son volume si h = 24 cm, D = 20 cm, d =16 cm.

3) La pièce représentée par la figure ci-dessous est un tronc de pyramide régulier dont les bases sont des carrés et dont les faces latérales ont une pente de 15 % (cotes en mm).



- Calculer la masse de cette pièce sachant qu'elle est en fonte de masse volumique 7,2 g/cm3.

4) Une poutrelle d'acier a une section représentée par la figure ci-dessous (cotes en mm).

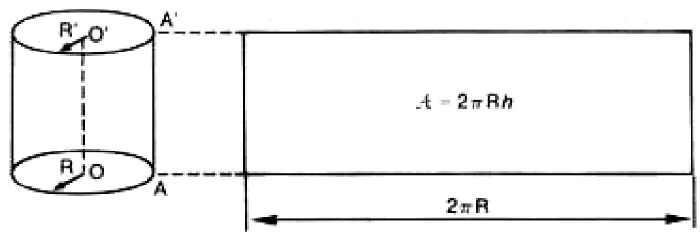


Sa longueur est 2,5 m; calculer sa masse sachant que la masse volumique est 7 800 kg /m^3.

CYLINDRE ET CONE DE REVOLUTION, SPHÈRE ET BOULE

1 CYLINDRE DE RÉVOLUTION

a) Aire de la surface latérale d'un cylindre de révolution



$$\boxed{A = 2\pi R\, h}$$

b) Volume du cylindre de révolution

$$\boxed{V = \pi R^2 h}$$

EXEMPLE

Calculer l'aire totale et le volume d'un cylindre de révolution tel que R = 5 cm; h = 10 cm.

1. Calcul de l'aire totale.

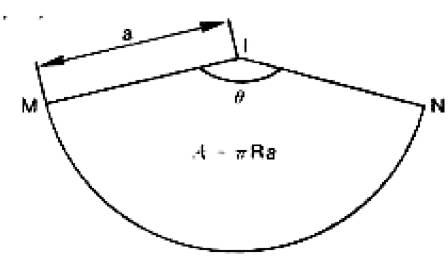
L'aire latérale est .$A = 2\ \pi \times 5 \times 10$.   soit $A = 314\ cm^2$.
L'aire A_1 d'un disque de base est telle que $A_1 = \pi\ R^2 = \pi \times 25$.
L'aire totale est $S = 2\ A_1 + A = 15\ 7 + 314 = 471\ cm^2$.

2. Calcul du volume.

$V = \pi R^2 h$.   soit : $V = \pi \times 25 \times 10$; $V = 785\ cm^3$.

2 CÔNE DE RÉVOLUTION

a) Aire de la surface latérale d'un cône de révolution

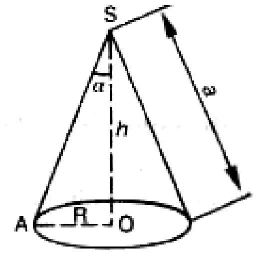


Elle est égale à l'aire du secteur circulaire d'angle au sommet de mesure θ et de rayon a .
R(rayon du cercle de base).

d'où $.A = \pi a^2 \times \frac{\theta}{360} = \pi a^2 \times \frac{R}{a}$

soit $\boxed{A = \pi\ \mathbf{R\ a}}$

b) Volume d'un cône de révolution



On admettra, B désignant l'aire du disque de base, h la hauteur du cône, que

$$\boxed{V = \frac{1}{3} B\, h = \frac{1}{3}\pi R^2 h}$$

EXEMPLE

Soit un cône de révolution dont le demi-angle au sommet mesure 30° et dont l'apothème est égale à 10 cm

1. Calculer le rayon et la mesure de l'angle de développement.
2. Calculer l'aire latérale et l'aire totale du cône.
3. Calculer la hauteur et le volume du cône.

Réponse

1. Dans le triangle rectangle SOA, $O\hat{S}A = 30°$ donc SA = 2 x OA = 2 R d'où $R = \frac{a}{2} = 5$ cm.

L'angle de développement est $\theta = 360 \times \frac{R}{a} = 360 \times \frac{5}{10} = 180°$.

2. L'aire latérale est $A = \pi R a = \pi \times 5 \times 10$. soit $A = 157\ cm^2$.
L'aire du disque de base est $A_1 = \pi R^2 = \pi \times 25$ soit $A_1 = 78{,}5\ cm^2$.
L'aire totale est $S = A_1 + A_1$ donc $S = 157 + 78{,}5 = 235{,}5\ cm^2$.

3. Dans le triangle rectangle SOA, $SO = SA \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc la hauteur du cône est :

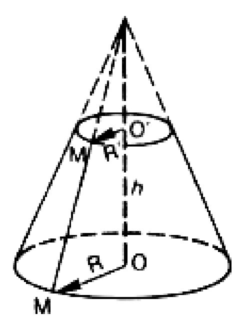
$h = a\frac{\sqrt{3}}{2}$; $h = 10\frac{\sqrt{3}}{2}$ soit h = 8,66 cm.

Le volume du cône est $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 25 \times 8{,}66$ d'où $V = 226{,}7\ cm^3$.

c) Complément : Tronc de cône de révolution

$$\boxed{A = \pi\, a\, (R + R')}$$

$$\boxed{V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + R'^2 + RR')}$$



SPHERE ET BOULE

1. DEFINITIONS

a) Sphère (fig.1)

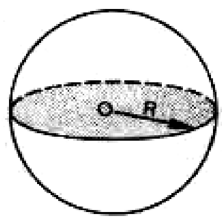


fig.1

On appelle sphère de centre O et de rayon R l'ensemble des points M de l'espace sels que OM = R.

b) Boule (fig.1)

On appelle boule de centre O et de rayon R l'ensemble des points M de l'espace tels que OM G R.

2. AIRE DE LA SPHERE VOLUME DE LA BOULE

a) Aire de la sphère

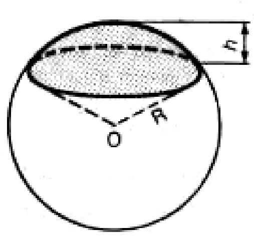
$$\boxed{A = 4\,\pi R^2}$$

b) Volume de la boule

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

3 CALOTTE SPHÉRIQUE. SEGMENT SPHÉRIQUE

a) Calotte sphérique



Si h désigne la hauteur de la calotte, l'aire de la calotte est :

$$\boxed{\boldsymbol{A = 2\pi Rh}}$$

b) Segment sphérique

Le segment sphérique est le solide compris entre une calotte sphérique et son cercle base
Le volume V du segment sphérique à une base est :

$$\boxed{V = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)}$$

EXEMPLE

Soit une sphère de rayon 20 cm.
L'aire de la sphère est $A = 4\pi R^2 = 4\ \pi \times (20)^2$ soit $A = 5\ 027\ cm^3$.

Le volume de la boule est $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times (20)^3$ soit $V = 33510\ cm^3$.

L'aire d'une calotte sphérique de hauteur h=5 cm est $A' = 2\ \pi Rh = 2\ \pi \times 20 \times 5$

soit $A' = 628\ cm^2$

Le volume du segment sphérique est $V = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h) = \frac{\pi \times 25}{3}(60\text{-}5)$

soit $V = 1440\ cm^3$.

EXERCICES

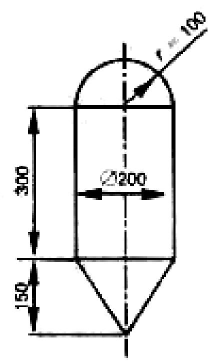
1) On considère une sphère de rayon 35 cm; calculer

- l'aire de la sphère et le volume de la boule;
- l'aire d'une calotte sphérique et le volume d'un segment sphérique de hauteur 8 cm

2) Une éprouvette cylindrique de diamètre intérieur 50 mm est graduée de 10 cm^3 en 10 cm^3.
Quelle est la distance séparant 2 traits consécutifs de la graduation?

3) On fait tourner un carré ABCD de côté a autour de la diagonale [AC].
Déterminer, en fonction de a, l'aire et le volume du solide de révolution engendré.
Application numérique a = 12 cm.

4) On considère la pièce de révolution représentée figure 10 (côtes en mm).



Calculer

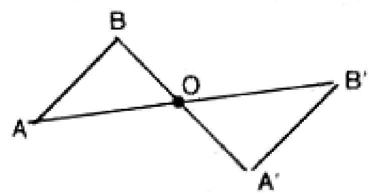
1° L’aire et le volume de la partie hémisphérique.
2° L’aire latérale et le volume de la partie cylindrique.
3° L’aire latérale et le volume de la partie conique.
4° L’aire totale et le volume de cette pièce.

VECTEUR. TRIANGLE QUELCONQUE

1 VECTEUR. SOMME DE DEUX VECTEURS

a) Vecteur

Considérons un couple de points ou bipoint (A, B) et un point O

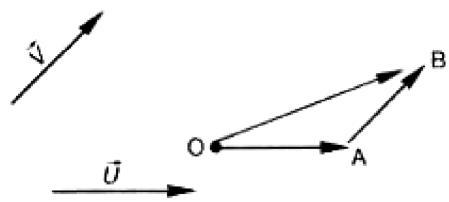


Construisons les images A' et B' de B et A dans la symétrie de centre O; les bipoints (A, B) et (A', B') ont des supports parallèles, même direction et AB = A'B'. On dit qu'ils représentent le même vecteur $\overrightarrow{AB}$.
On écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}}$$

b) Somme de deux vecteurs

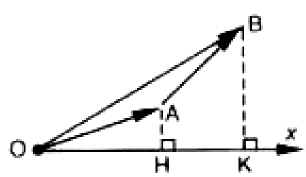
Soit les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ et O un point quelconque.



$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Si } \overrightarrow{OA} = \vec{U} \text{ et } \overrightarrow{AB} = \vec{V} \\ \text{alors } \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \text{ ou } \overrightarrow{OB} = \vec{U} + \vec{V} \end{array}}$$

c) Projection de la somme de deux vecteurs

Considérons la figure suivante :



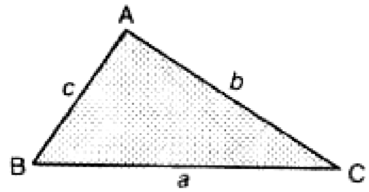
Les projections orthogonales de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AB}$ sur l'axe Ox sont respectivement $\overrightarrow{OH}$, $\overrightarrow{HK}$, $\overrightarrow{OK}$

Notons que : $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HK}$,

On énonce :

La projection orthogonale sur un axe de la somme de deux vecteurs est égale à la somme des projections de chacun de ces vecteurs.

2 RELATIONS TRIGONOMÉTRIQUES DU TRIANGLE QUELCONQUE



Notons a, b, c les mesures des côtés [BC], [CA]. [AB] du triangle ABC.
On admettra les relations suivantes :

Côtés et cosinus des angles opposés aux côtés

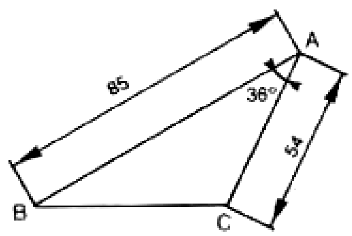
$$\boxed{\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ h^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ c^2 = a^2 + h^2 - 2\,ab \cos C \end{array}}$$

Côtés et sinus des angles opposés aux côtés

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \qquad ;A + B + C = 180°$$

EXEMPLE

Soit un triangle ABC tel que A = 36°; b = 85 mm; c = 54 mm.



Calcul de a.
On écrit $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A$ soit $a^2 = 7\,225 + 2\,916 - 2 \times 85 \times 54 \times \cos 36°$.
A l'aide de la calculatrice on obtient :a2 =2714,22 d'où a = V2 714,22; a=52,1 mm.

Calcul de $B\hat{C}A$.

On écrit : $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{a}{\sin A}$ soit $\dfrac{54}{\sin B} = \dfrac{52{,}1}{\sin A}$

d'où : $\sin B = \dfrac{54 \sin 36}{52{,}1} = 0{,}6092$; B = 37,53° ou 37° 32'.

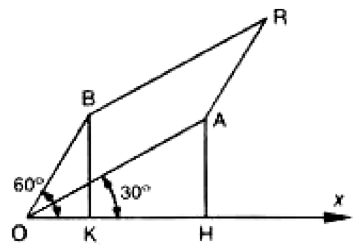
On en déduit : C = 180 - (36 + 37° 32') = 106° 28'.

EXERCICES

1) On considère un triangle ABC tel que AB = 4; BC = 5,6; B = 80°. Calculer AC et BAC.

2) On donne deux forces concourantes ayant pour intensité 45 N et 70 N.
Elles délimitent un angle de 43°.
Calculer l'intensité de la somme $\vec{F}$ des deux forces et l'angle que fait $\vec{F}$ avec chacune d'elles.

3) Les côtés OA et OB d'un parallélogramme mesurent respectivement 8,5 cm et 4 cm et définissent avec
Ox des angles de mesures respectives 30° et 60°.
Les points A et B se projettent orthogonalement sur Ox suivant H et K.



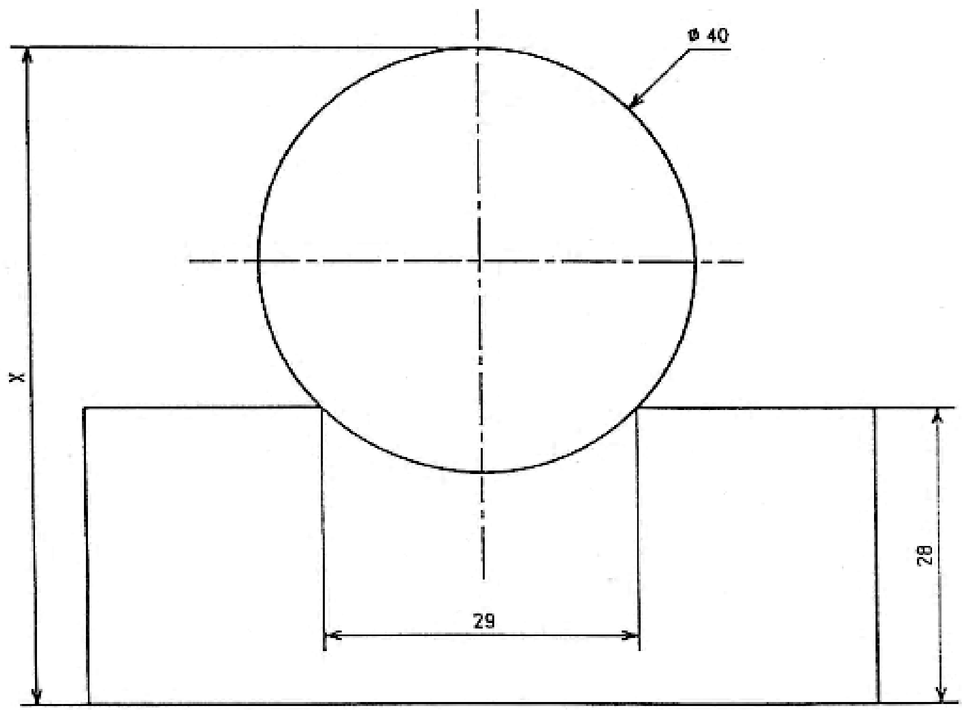
1° Calculer AH, OH, BK, OK.

2° Calculer OR sachant que $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

3° Calculer OR directement sans utiliser les questions 1 et 2.

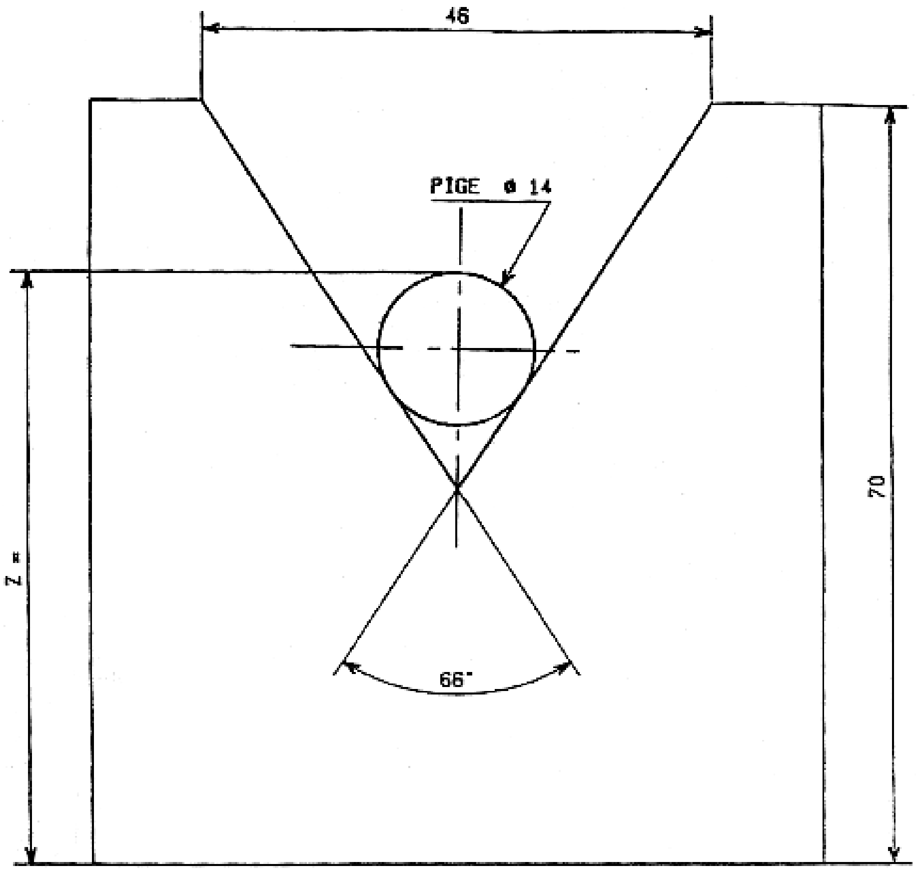
EXERCICES :

1.



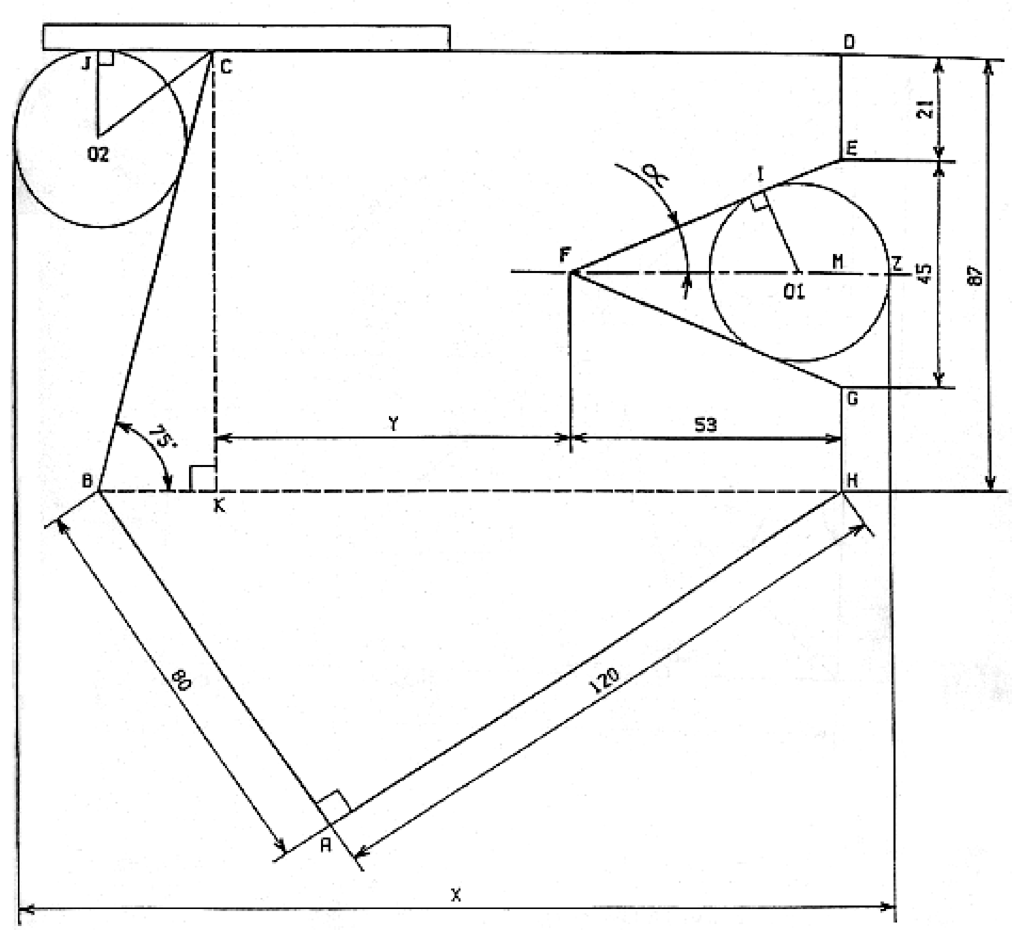
Dans l'essai de pénétration ci-dessus, calculer la hauteur X.

2.



Dans le vé de centrage ci-dessus, calculer la cote Z.

3.



Dans le gabarit ci-dessus, calculer :

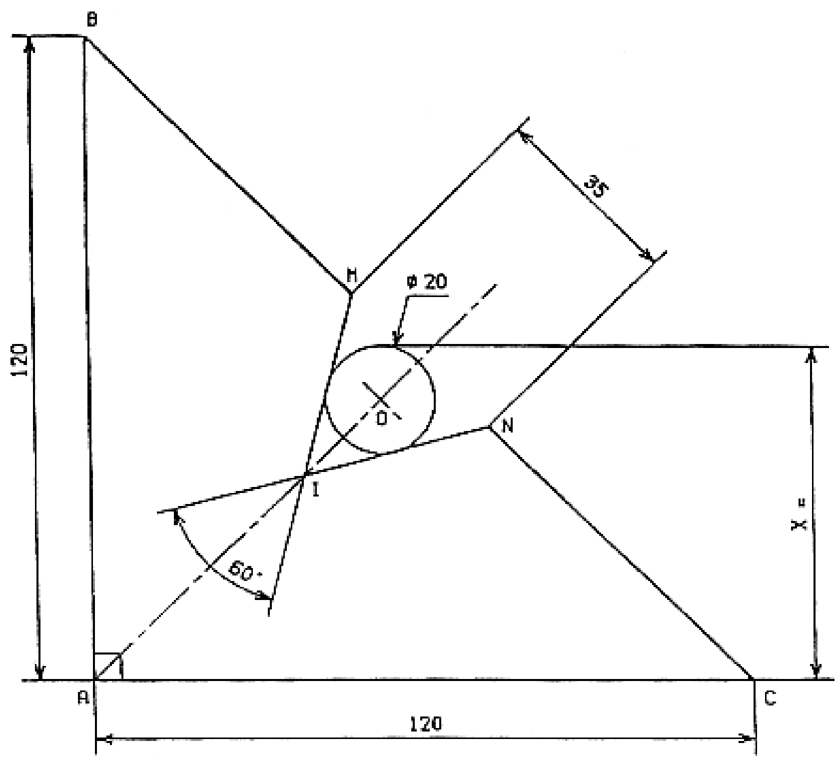
a) **La longueur BH**

b) **L'angle α**

c) **La cote Y**

d) **La cote de vérification X (piges Φ 35)**

4.



Dans le vé à entaille ci-dessus, calculer :

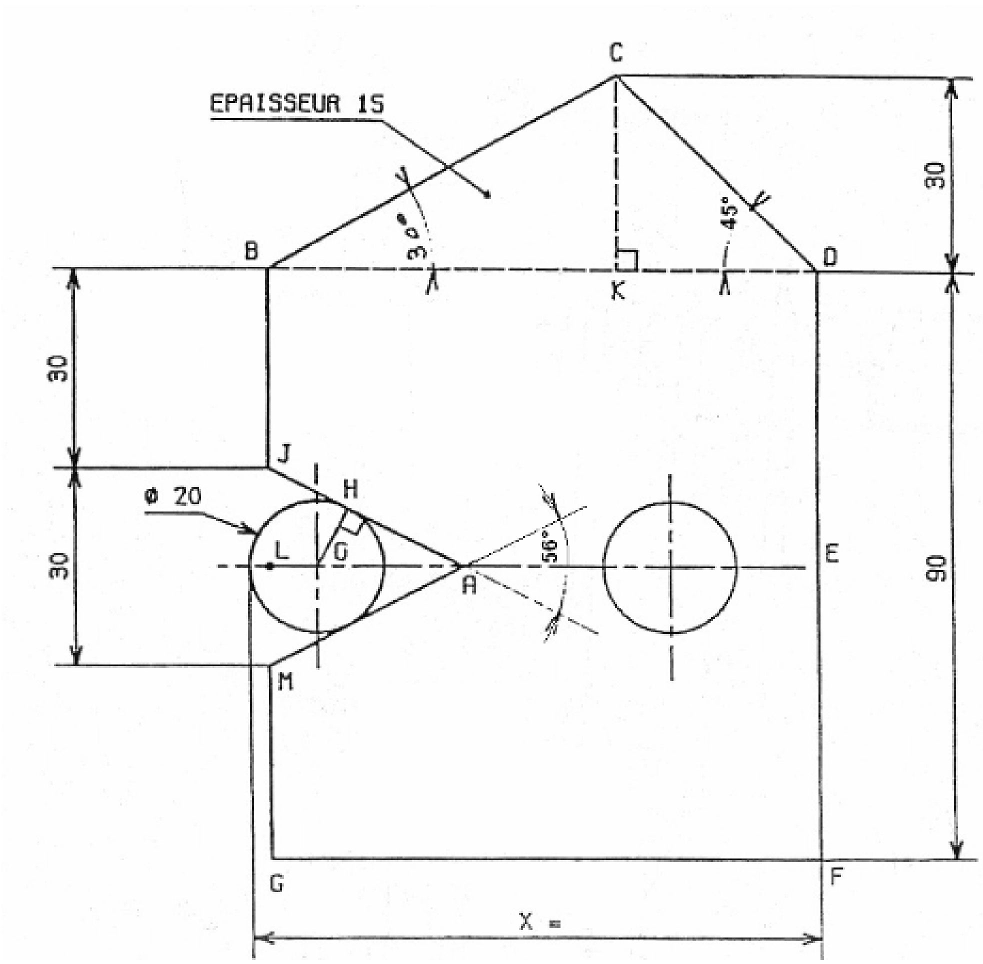
1) La longueur BC

2) La longueur AI

3) La longueur AO

4) La cote de vérification X

5.



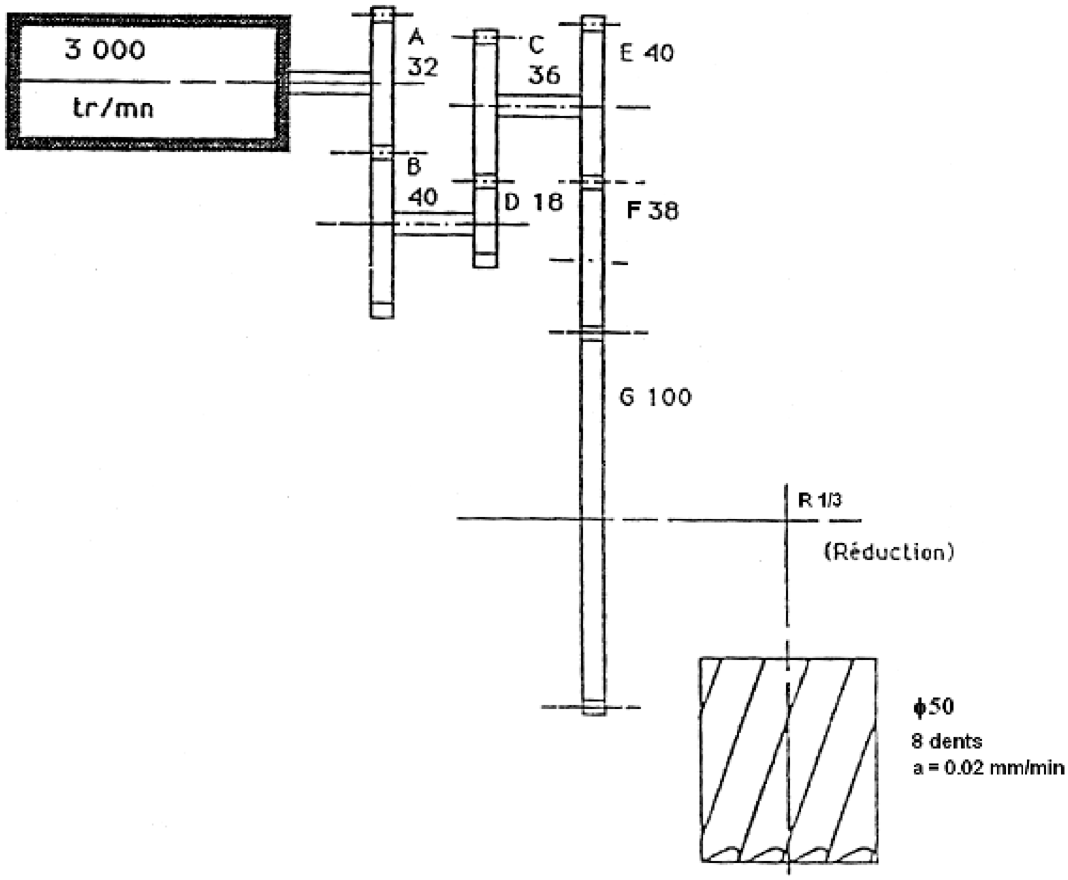
Dans l'épure ci-dessus, calculer :

- a. **La longueur BD.**
- b. **La longueur AE.**
- c. **La position X= ?**
- d. **On perce un trou Φ 20, à la vitesse de coupe de 32 m/min, quelle est la fréquence de rotation à utiliser ?**
- e. **Le temps de perçage, si l'avance est de 0.2mm/tour ?**

NOTE : Les vitesses disponibles sur perceuse sont :

215 — 280 — 375 — 500 — 670 et 900 tours/min.

6.



D'après le montage de roues ci-dessus calculer :

1) la vitesse de coupe

2) la fréquence de rotation de la fraise (tr/min)

3) le temps d'usinage d'une pièce longueur 160mm, (fraise dégagée)

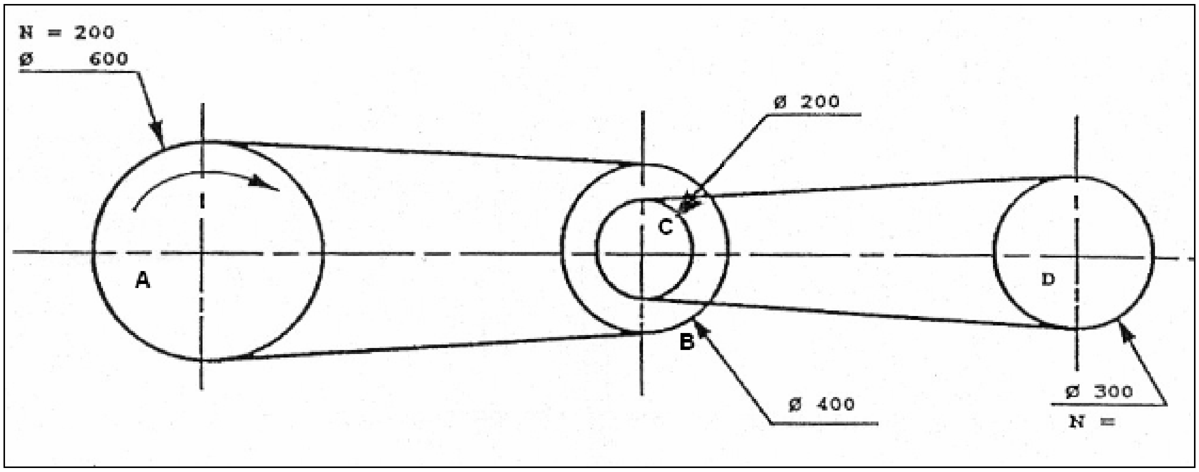
7. **La vitesse de rotation d'une poulie est de 560 tr/min**

— la vitesse linéaire d'un point de la périphérie de cette poulie est de 7,04 m/min.

— calculer le rayon de la poulie

(Prendre $\pi = 22/7$)

8.

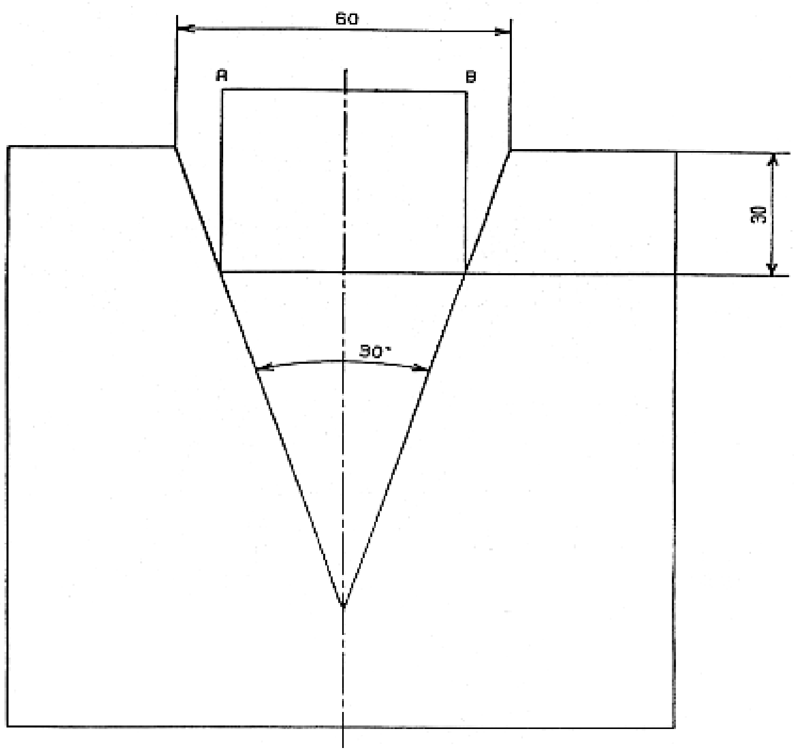


Dans le système de transmission ci - dessus :

— indiquer dans quel sens tourne la roue D.

— trouver la fréquence de rotation de la roue D.

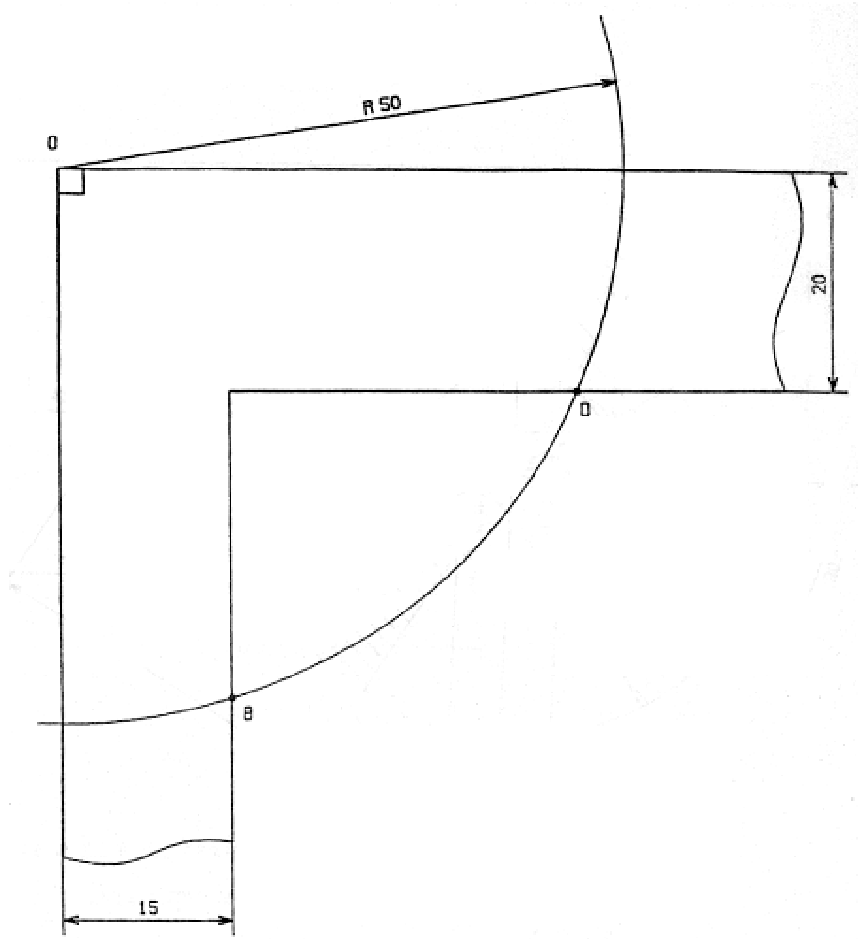
9.



On donne une entaille de 30°.

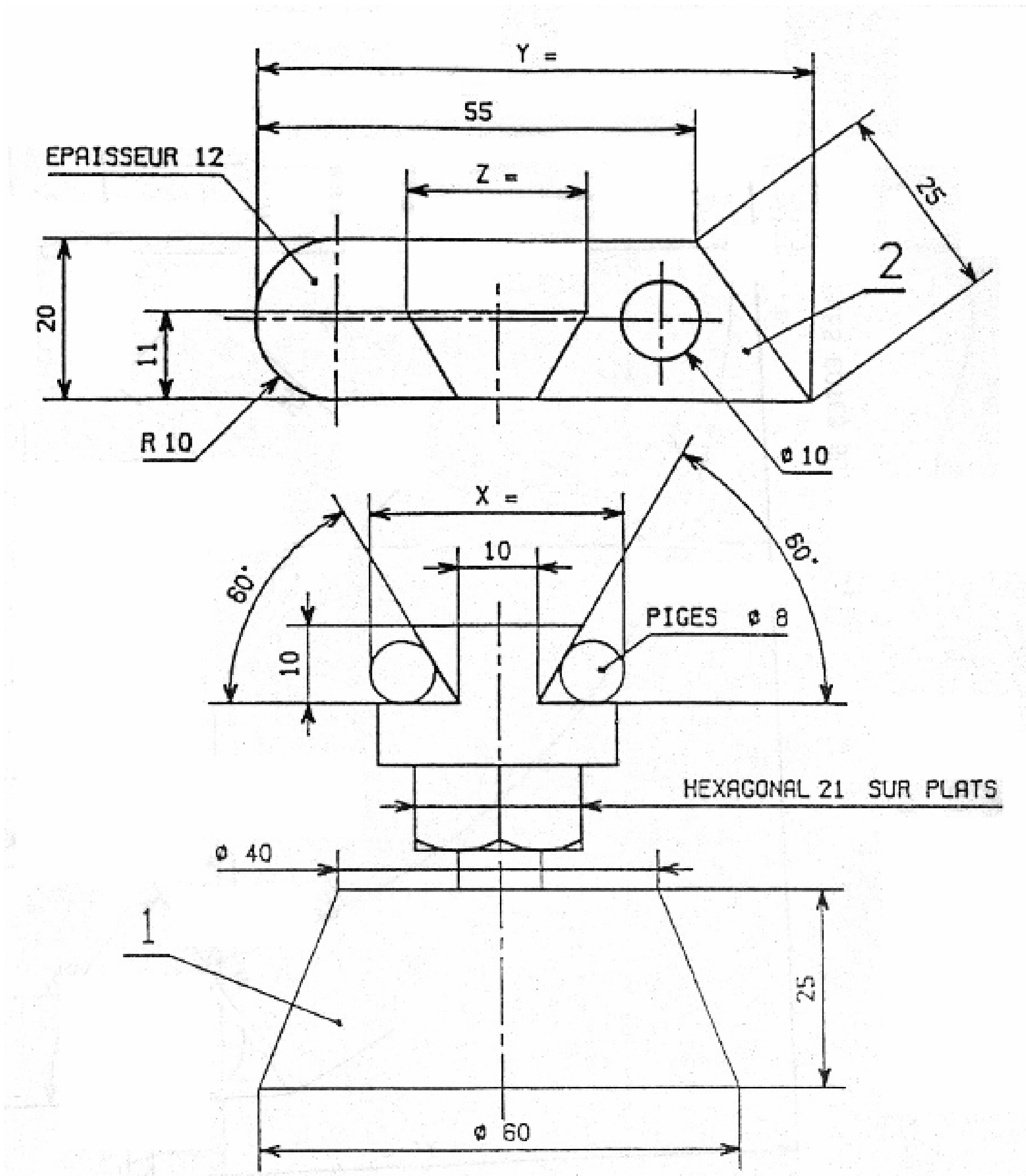
Un carré dont la base se trouve à 30mm de la partie supérieure de l'ouverture, trouver le coté du carré AB

10.



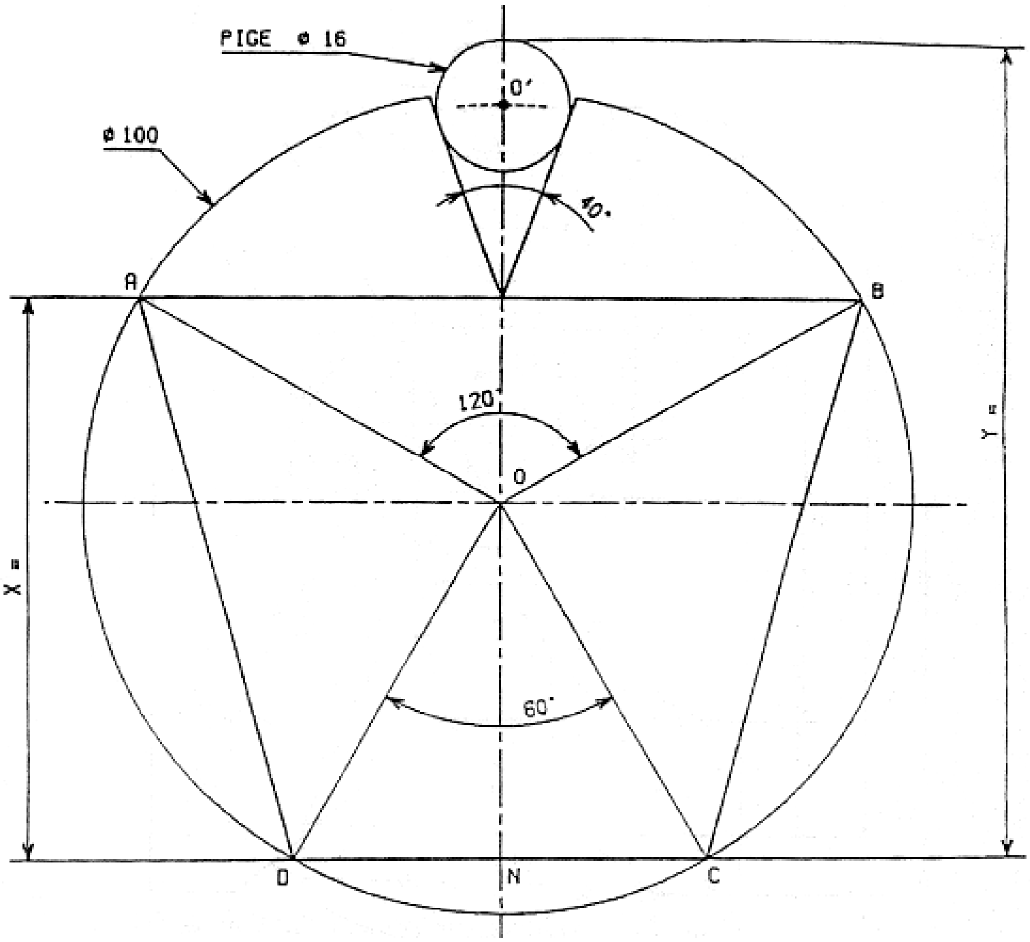
Dans l'équerre ci -dessus, calculer la longueur de l'arc BD.

11.



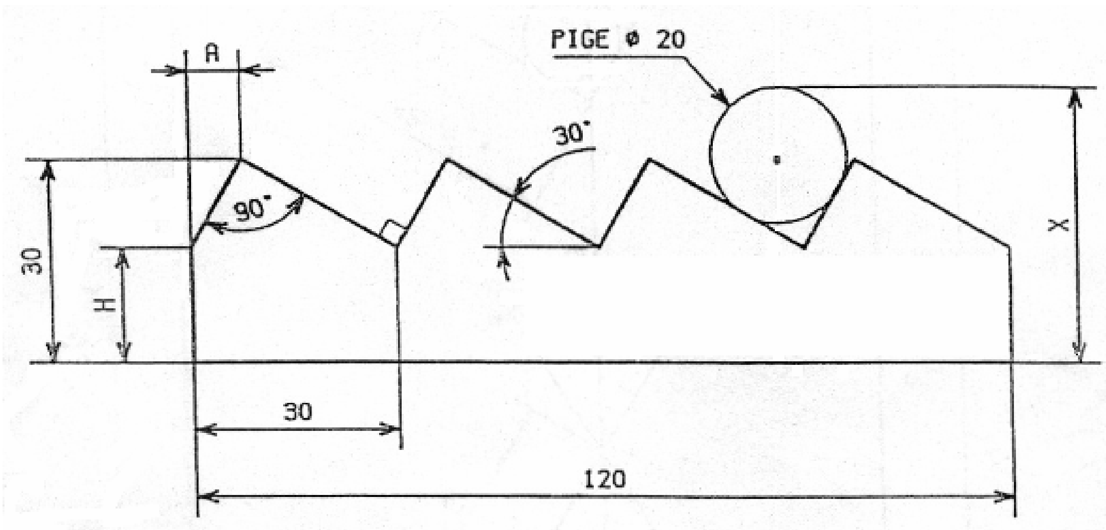
Dans l'ensemble ci-dessus, calculer :
1) la conicité de la pièce n°1.
2) le Ø du cercle circonscrit de l'hexagone de 21 sur plats.
3) la cote sur piges x
4) la cote Z
5) la cote Y
6) le volume de la pièce n°2.

12.



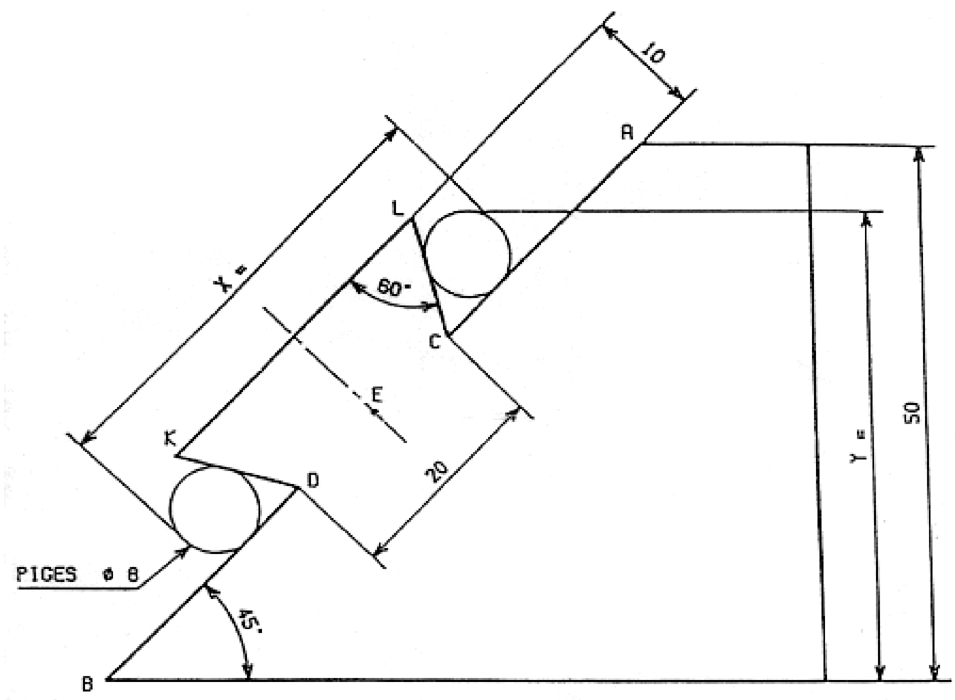
D'après la pièce ci - dessus, calculer :
1) la cote X
z) la cote de vérification Y
3) la cote AO
4) le périmètre du trapèze ABCD

13.



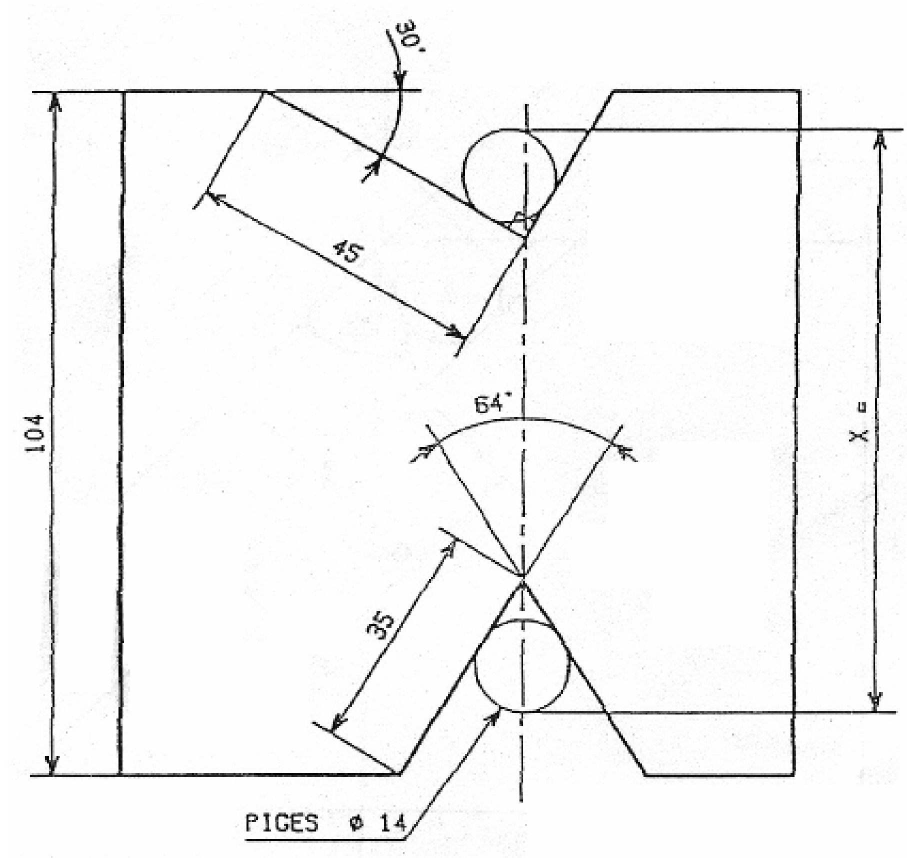
Le dessin ci -dessus représente une crémaillère.
Calculer :
1) la position A
2) la hauteur H
3) la cote X pour la vérification de la profondeur des dents.

14.



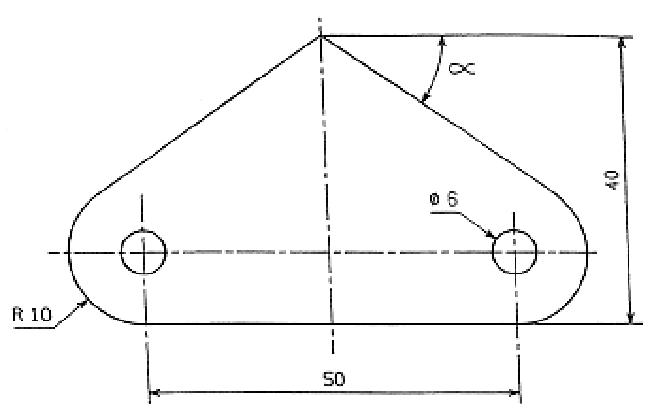
Soit un élément de queue d'aronde dans lequel E est le milieu de CD et AB :
1) calculer la cote de vérification X (pige Ø 8)
2) calcu1er la cote Y
3) calculer la longueur KL

15.



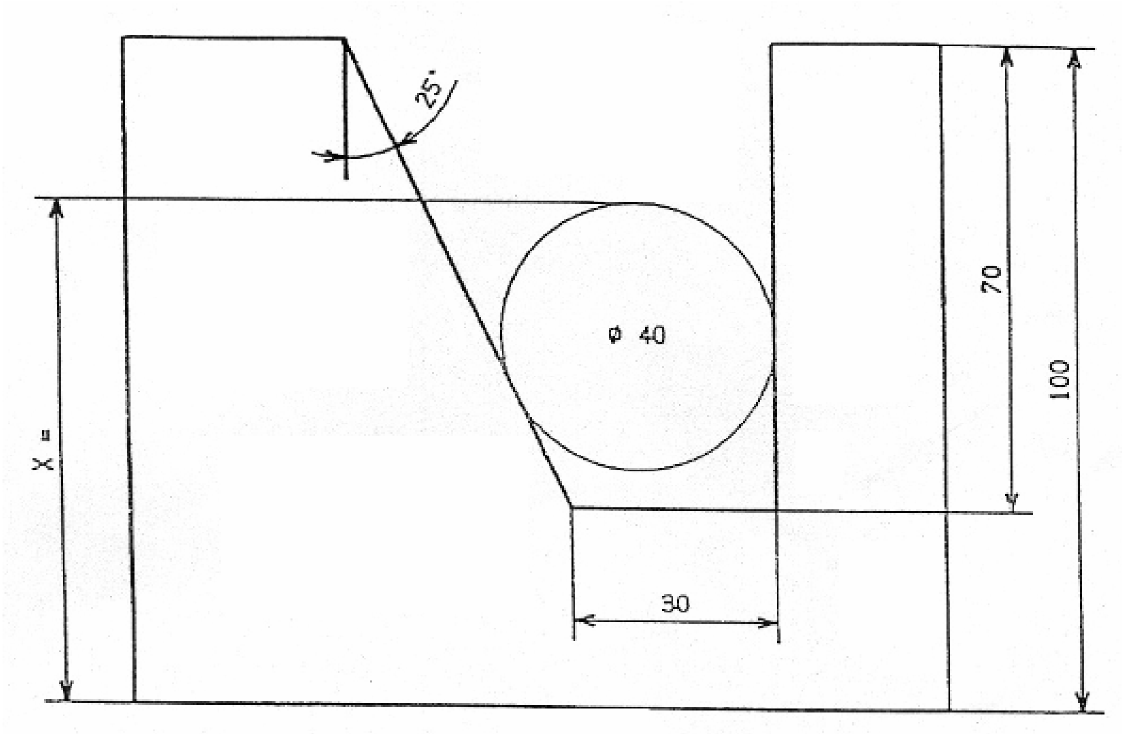
Dans le gabarit ci-dessus :
— Calculer la cote de vérification X.

16.



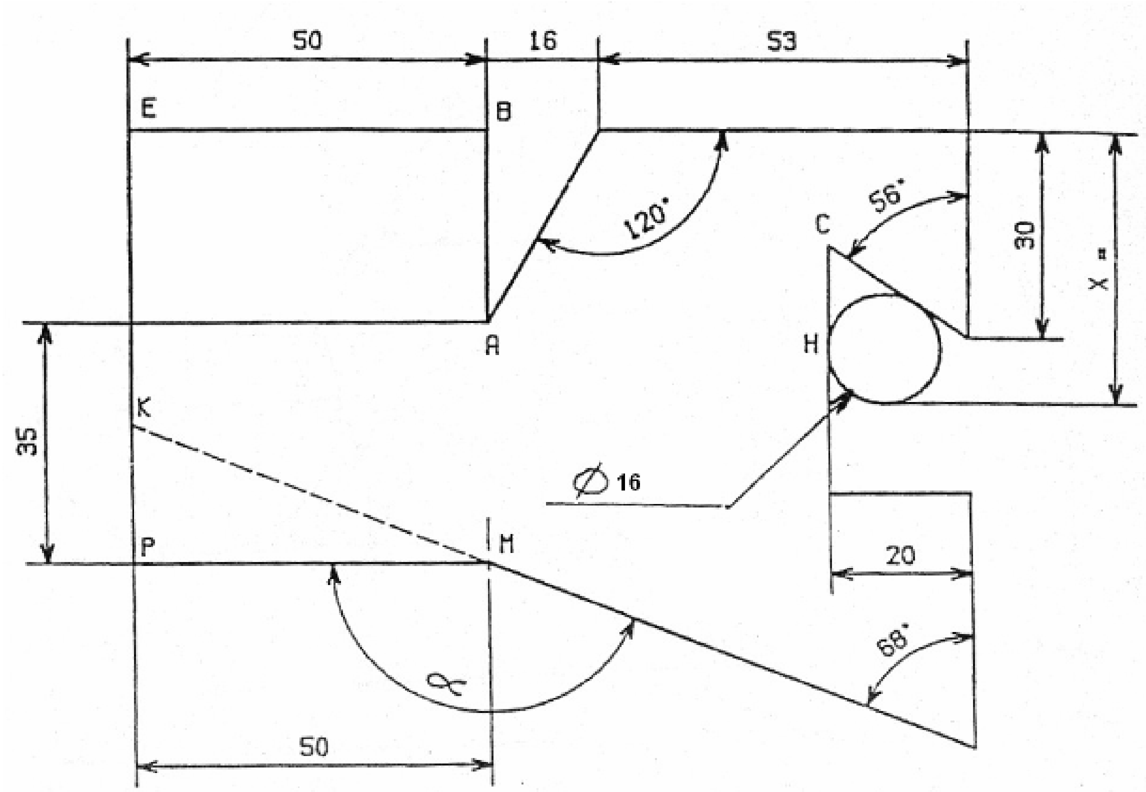
La pièce ci—dessus est usinée d'après un disque Ø75, épaisseur 6.
a) calculer l'angle α (angle d'inclinaison de la fraise)
b) établir une méthode d'exécution pour une série de 5 pièces.

17.



Calculer la hauteur X.

18.



D'après le gabarit ci - dessus, calculer :

1) La cote X

2) La longueur AB

3) La hauteur EK

4) L'angle α.